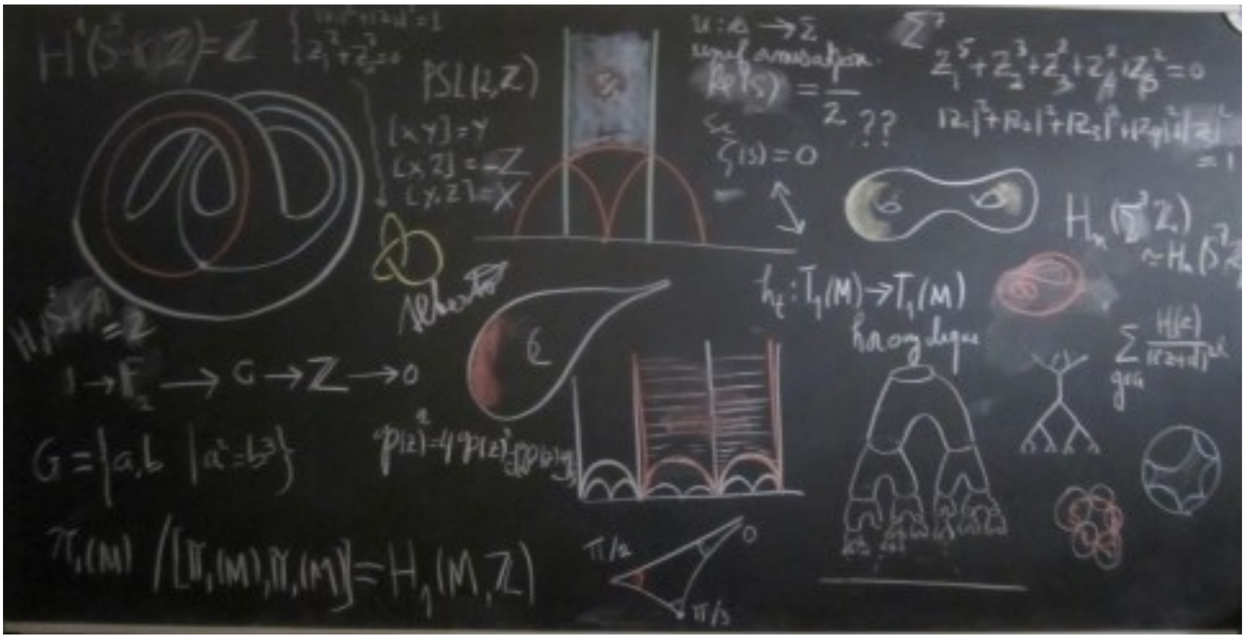
Qu’est-ce que les Mathématiques ?
Mathématiques et Physique.
La méthode scientifique.

Petit essai



Stephane Collion

Agrégé et Docteur en Mathématiques,
Commandant de bord sur Boeing 787 à Air France.

Qu'est-ce que les Mathématiques ?
Mathématiques et Physique.
La méthode scientifique.

Petit essai

Qu'est-ce que les mathématiques ? Pourquoi suscitent-elles autant de fascination chez certains, et, malheureusement, de rejet chez d'autres ?

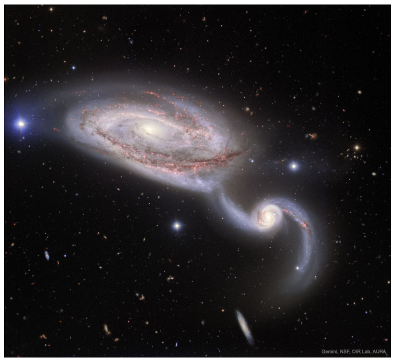
Pour tenter de répondre à ces questions, ce texte commencera par proposer une « définition » des mathématiques, qui mènera à une discussion sur la nature étrange des objets mathématiques. Puis il exposera quelques réflexions sur le plaisir de faire des maths. Il abordera ensuite la fascinante relation entre les mathématiques et la physique, essentiellement à travers l'exemple de la relativité générale ; s'en suivra une « rêverie » sur le lien entre réalité, physique et mathématiques. Je proposerais ensuite quelques remarques sur la démarche scientifique et la nécessité qu'elle fasse partie du bagage culturel de tout citoyen. Il se conclura par quelques réflexions personnelles sur les difficultés de l'enseignement des mathématiques, sujet éminemment passionné et délicat…

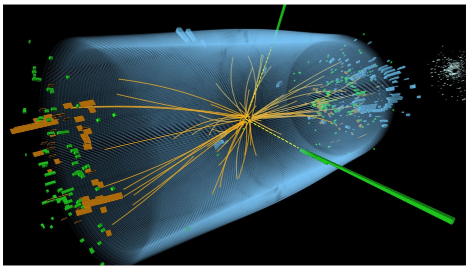
Je tiens à préciser que cet essai expose des opinions personnelles, issues de nombreuses discussions et lectures. Je cite autant que possible mes sources d'inspiration (voire aussi une liste de noms à la fin de ce papier), mais ne cherche pas à être exhaustif dans les références. Il s'agit ici essentiellement de partager une passion pour les mathématiques avec ceux qui s'en sont, peut-être, éloignés. Les réflexions exposées sont donc ouvertes à discussion !

Stephane Collion
Agrégé et Docteur en Mathématiques de Paris 6 Sorbonne Université,
Commandant de bord sur Boeing 787 à Air France.
contact : stephane.collion@wanadoo.fr

version du 6 octobre 2023.

0 - Introduction.

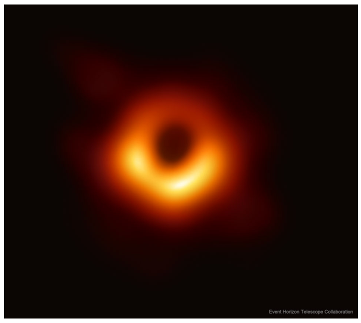




Le 20-ème siècle a offert une extraordinaire explosion des connaissances scientifiques dans tous les domaines. Les progrès des moyens d'observation, vers "l'infiniment grand", avec des télescopes de plus en plus puissants, puis des télescopes spatiaux, et vers "l'infiniment petit", avec de manière duale, des accélérateurs de particules et des microscopes qui aujourd'hui permettent de "voir" la silhouette des atomes, ont fait progresser la science physique plus que dans toute l'histoire précédent 1900. De même, il y a eu plus de théorèmes mathématiques démontrés au 20-ème siècle que dans la période allant de Thalès, en 450 avant JC, jusqu'en 1900.

Pourtant, on assiste depuis le début du 21-ème siècle à la dramatique émergence d'une grave défiance à l'égard des sciences. Pire, l'explosion des réseaux "sociaux" relègue pour certains le discours scientifique à une opinion parmi les autres.

De nombreux philosophes, dont la parole pourrait pourtant être utile, négligent trop l'évolution des sciences ; ceux d'entre eux qui m'apparaissent les plus crédibles sont ceux qui ont une formation scientifique, ou au moins une connaissance profonde de la science actuelle. Par ailleurs, la classe politique française est constituée d'individus qui n'ont aucune culture scientifique, et qui s'en désintéressent en faisant preuve d'une inquiétante ignorance. La « culture », telle qu'elle est en effet définie par ces politiques, (définition malheureusement acceptée par une partie trop importante du « grand public »), exclut totalement la science, pan pourtant fondamental de l'évolution de nos sociétés.



La *physique* est un peu épargnée, particulièrement grâce à l'astrophysique dont les objets, étoiles, exoplanète, trous noirs, big-bang, fascinent naturellement. Le travail des physiciens apparait donc globalement respecté. Mais pourtant, une méconnaissance de ce qu'est la méthode scientifique conduit toujours certains à clamer « Einstein s'est trompé ! » à la première annonce incomprise d'une observation astronomique, ou, plus dramatiquement, à croire encore que « la terre est plate ! ».

Les *mathématiques*, semblent à part : respectées mais craintes à cause de leur lamentable utilisation comme moyen de sélection scolaire. Curieusement, ou miraculeusement, leur nature mêmes protègent pourtant les mathématiques de cette défiance à l'égard des sciences. Les critères de validation d'une affirmation mathématique sont tels qu'un résultat établi, un théorème démontré, ne peut plus être remis en question. (Ce qui ne veut pas dire que pendant la recherche de la démonstration, il ne peut pas y avoir d'erreur, ou que ce processus n'est pas parfois très long). Cela n'empêche malheureusement pas d'entendre régulièrement la sentence « c'est mathématique ! » utilisée pour couper court à un débat dans lequel il n'y a rien de mathématique, démontrant que celui qui la prononce ne connait manifestement rien aux maths !

La *biologie et la médecine* : si la biologie appartient clairement au domaine des sciences expérimentales, la médecine est apparu à travers la crise du Covid19 dans une situation délicate. Les critères de validation des vaccins et médicaments relèvent essentiellement de la définition d'une acceptabilité statistique, ce qui n'est pas le cas des théories biologiques. Là encore, une meilleure connaissance de la méthode scientifique, et donc des choix possibles de critères de validation d'une théorie, ou de résultas d'expériences scientifiques, apparait nécessaire à chaque citoyen pour se forger une opinion éclairée, indépendante des dictats politiques, et des informations profondément erronées, voire des contre-vérités, proférées par certains journalistes en quête de sensationnel.

Je voudrais commencer cet essai par un petit exposé de ce que sont, pour moi, les mathématiques, suivi de quelques considérations sur la nature des objets mathématiques. J'aborderais ensuite (trop brièvement) la fascinante relation entre les maths et la physique, essentiellement à travers l'exemple de la relativité générale. Je poursuivrais avec quelques remarques sur la démarche scientifique et pourquoi il est fondamental qu'elle fasse partie du bagage culturel de tout citoyen, ainsi que sur l'importance de la recherche fondamentale. Enfin, je terminerais avec quelques réflexions personnelles sur le problème de l'enseignement des mathématiques.

I - Les Mathématiques.

-1/ Qu’est-ce que les mathématiques ?

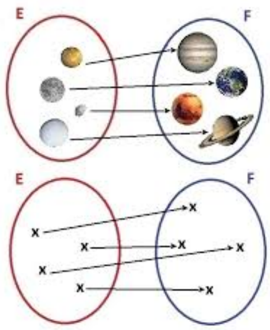
Il est étonnant de constater que de nombreux mathématiciens semblent incapables de définir ce que sont les mathématiques, ou du moins ne cherchent pas à le faire… Or, je pense précisément que l'une des principales difficultés de l'enseignement et de la vulgarisation des mathématiques est de ne pas savoir en présenter une définition simple et consensuelle.

On présente bien trop souvent les mathématiques à travers leurs applications, ou leur « utilité », ce qui est malhonnête car cela ne correspond pas à la réalité du développement des mathématiques et de la pratique de cette discipline par les mathématiciens. Ainsi justifier ou tenter de susciter l’intérêt pour les maths en déclarant « les maths, ça sert à faire de la finance » est bien peu susceptible de redorer l’image des mathématiques, et de plus, encore une fois, c’est absolument incorrect. Notons en revanche que rapprocher les mathématiques de la physique, et en particulier de l’astronomie (aujourd’hui l’astrophysique), est beaucoup plus pertinent et historiquement juste. En effet, nous y reviendrons, l’astronomie et les mathématiques se sont développées conjointement, en notant que, contrairement à un sens unique souvent invoqué, chacune est source d’inspiration et de questionnement pour l’autre.

Les maths ne sont pas « un langage », comme on l’entend souvent : elles structurent notre observation de l’univers physique, et elles génèrent des problèmes, des sujets de recherche, interne à son propre domaine.

De nombreuses approches sont certainement possibles pour tenter de définir ce que sont les mathématiques. Je propose ici de considérer, qu’au moins à leur origine, les mathématiques ont pour but de modéliser le monde physique qui nous entoure, en éliminant certains aspects considérés superflus : *les maths cherchent à idéaliser, pour pouvoir les étudier, les phénomènes naturels*.

Ainsi, les mathématiques cherchent à extraire des structures communes à divers aspects de la nature, comme les nombres qui servent aussi bien à compter les étoiles dans le ciel que les moutons d’un troupeau, ou les figures géométriques qui peuvent décrire aussi bien la trajectoire des planètes autour du Soleil que la forme des champs que veulent se partager des paysans. Autrement dit, *les mathématiques servent à simplifier le réel*. (Ce à quoi certains pourraient répondre que c’est raté !) Puis, une fois définies ces structures, les mathématiques s’amusent à les faire vivre puis à les questionner pour mieux les comprendre, quitte à s’éloigner de leur origine naturelle. Les mathématiques ont ainsi leur logique propre, et une immense partie des mathématiques se développe sans aucun lien avec la physique ni aucune volonté d’application concrète.



Fonction bijective

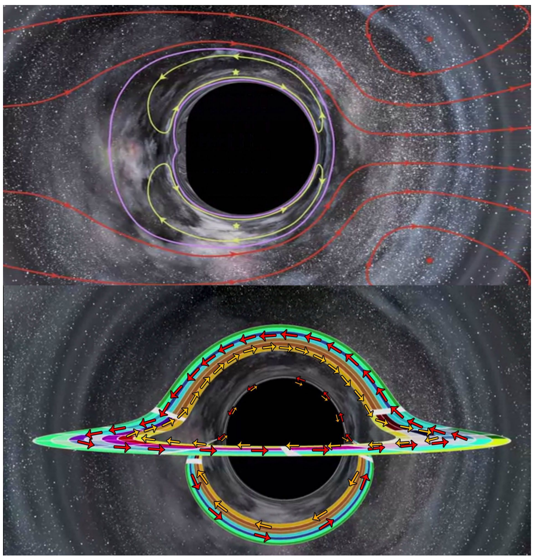
La physique, partenaire indissociable des maths, tente de décrire le monde matériel qui nous entoure et élabore des modèles pour prédire l’évolution des phénomènes naturels. C’est grâce aux mathématiques que les modèles de la physique s’expriment le mieux, mais c’est aussi dans les mathématiques que la physique trouve bien souvent son inspiration.

<u>Une première définition possible :</u> *Les mathématiques apparaissent donc comme une science (c'est-à-dire un domaine de connaissance) dont le but est d'extraire de différents aspects de la nature des structures communes, de les idéaliser pour les simplifier, puis de les étudier, soit pour elles-mêmes, soit pour modéliser des phénomènes naturels. L'étude de ces premières structures nécessite la création de nouvelles structures, plus sophistiquées, devenant à leur tour sujets d'études, amenant alors à de nouvelles constructions. Cette chaine imbriquée et illimitée de constructions et de questionnements, liées ou non à l'observation du monde physique, constitue la principale source du développement des mathématiques. La spécificité des mathématiques s'appuie aussi sur des modes de raisonnement précis, dont la validation ne dépend pas d'une comparaison à l'observation, mais du respect d'une démarche déductive bien définie, appelée logique.*

Pour expliquer cette première définition sans doute un peu abstraite, je vous propose de l'illustrer par les deux exemples familiers déjà cités plus haut : les nombres et les figures géométriques. Ce sont d'ailleurs certainement les premiers objets mathématiques étudiés par l'humanité. Le terme de structure utilisé dans cette définition est assez subtil : il peut s'agir d'objets, donc, comme les nombres, les droites, les cercles, les triangles, … Mais une structure peut aussi être un schéma qui relie ces objets : une opération par exemple, qui relie deux nombres en leur associant leur somme, leur produit ; ou une distance, qui relie deux objets indépendamment de leur nature, distance entre deux points, entre deux nombres ou aussi entre deux fonctions…

Considérons donc ***les nombres*** : ils servent initialement à compter les objets : on attache un même « symbole », par exemple le nombre 3, à 3 pommes, 3 chats, 3 planètes, 3 étoiles. Pourtant, ensuite, ce sont bien les mathématiques qui élaborent des méthodes pour les additionner, les multiplier, les diviser, sans aucune considération pour la nature des objets auxquels se rapportaient initialement les nombres. Ces méthodes n'ont par ailleurs rien de « naturelles ». L'étude des nombres, comme l'illustrent de manière extraordinaire les problèmes soulevés par la compréhension de la répartition des nombres premiers, a été développée par de nombreux mathématiciens, à partir disons du 18ème siècle, sans aucune considération d'applications ou de rapport avec le monde réel.

Considérons ***les figures géométriques*** : à partir d'observations de formes imparfaites dans la nature, on crée les cercles, les triangles, les polyèdres, etc... On observe ainsi les planètes et leur ronde dans le ciel, le mouvement d'un caillou lancé, la forme d'une montagne. Puis, une fois idéalisées leurs formes, les mathématiciens étudient les propriétés des figures géométriques ainsi créées : rapport de la circonférence au diamètre, point de concours des médianes, calcul des aires des surfaces, des volumes.



Allant plus loin, le calcul justement des aires, des volumes, mélange nombre et géométrie. Pour trouver des méthodes plus efficaces de calcul, les mathématiciens sont conduits à « inventer » des objets mathématiques parfois fort éloignés des objets naturels initialement considérés. C'est ainsi qu'ont été inventés par Newton les fonctions et leurs dérivées, et à partir de là le *calcul différentiel et intégral*. L'étude de la géométrie à l'aide de ce « calcul différentiel » s'est ensuite développée de manière purement interne aux mathématiques au 18ème siècle, là encore sans considération pour le monde réel…jusqu'à ce qu'Einstein s'en serve 60 ans plus tard pour inventer une théorie de la gravitation permettant de mieux décrire le mouvement des planètes et des galaxies, et de prédire l'existence des trous noirs !

<u>Reformulons notre définition :</u> Les mathématiques sont un ensemble d'objets et de méthodes intellectuels créés (ou utilisés ?) par l'esprit humain pour décrire, comprendre et modéliser le monde physique qui l'entoure. Ces objets et méthodes sont des idéalisations issues de la simplification de divers aspects de la nature (c'est seulement et simplement en cela qu'ils sont abstraits !). Mais les mathématiques sont aussi un ensemble plus vaste d'objets et de méthodes développés par pure curiosité intellectuelle à partir de ceux issus de l'observation naturelle. Le développement des mathématiques s'appuie fondamentalement sur ces deux démarches, modélisation idéalisée de la nature et curiosité intellectuelle, sans que l'une ne puisse se passer de l'autre ; ces deux démarches sont synergiques, chacune offrant de l'inspiration à l'autre. La spécificité des mathématiques s'appuie également sur des modes de raisonnement précis, dont la validation ne dépend pas d'une comparaison à l'observation, mais du respect d'une démarche déductive bien définie, appelée logique.

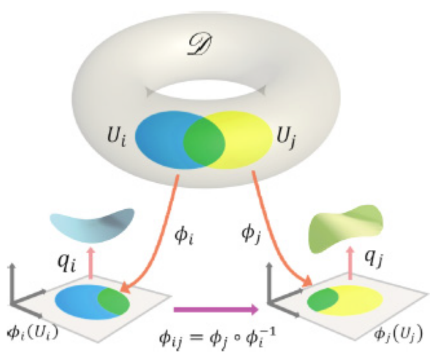
Ces définitions des mathématiques permettent peut-être d'aborder plus sereinement « l'épineuse » question de la nature des objets mathématiques. Nous allons donc les approfondir et les préciser à travers quelques réflexions et propositions sur cette incontournable interrogation.

-2/ La nature des objets mathématiques.

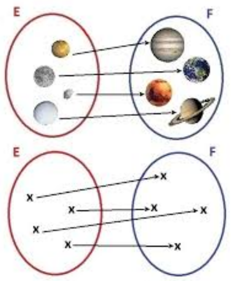
Les mathématiques ont-elles une existence intrinsèque indépendante de l'Homme qui serait peu à peu révélée à lui, ou sont-elles une invention humaine permettant de décoder, avec les facultés qui sont les nôtres, le fonctionnement du monde qui nous entoure ?

C'est un très vieux débat, qui semble sans fin… A ce sujet, le physicien Eugene Wigner a écrit un célèbre article intitulé « La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles» où il pose la question de savoir pourquoi les mathématiques semblent être le langage de la nature. Savoir si les objets mathématiques préexistent à leur découverte par les chercheurs ou s'ils sont sont inventés par l'homme est l'objet d'une abondante littérature. Il y a d'un coté les « platoniciens » qui considèrent que les mathématiques « existent » dans la nature, et que les mathématiciens ne font que les découvrir, et les « formalistes » qui considèrent que les mathématiques ne sont qu'un jeu formel inventé par l'esprit humain. (La première hypothèse n'est pas loin d'affirmer que les mathématiques sont le langage de Dieu… je laisse chacun juge de cette affirmation. Elle attribue manifestement un coté mystique aux objets mathématiques).

Une approche moderne réconciliant les deux points de vue, et rendue crédible grâce au neurosciences, est de considérer que les maths sont fondamentalement liées à nos modes de perception et à notre façon d'appréhender le réel. On pourrait ainsi dire que le fonctionnement des objets mathématiques est lié au fonctionnement de notre cerveau et à nos sens d'observation. Par exemple, la notion d'ensemble mathématiques comme collection d'objets vérifiant une même propriété, ou un même mode de fonctionnement, correspond à la notion de "concept" nous permettant de parler d'une classe d'objets sans les identifier précisément... Si l'on vous parle de clefs posées sur une table, et qu'on vous envoie les chercher en vous disant qu'elle sont dans un salon, bien que n'ayant jamais vu ces clefs et cette table, vous identifierez sans problème le salon, la table et les clefs. Certains neuro-biologistes ont mis en évidence d'autres correspondances plus profondes ; leurs travaux permettent ainsi de considérer que certains concepts mathématiques sont inhérents au fonctionnement même de notre cerveau, d'autres étant ensuite inventés par les mathématiciens à partir de ceux-ci. (Voir par exemple « Arithmetic has a biological origin » de Randolph Grace).



Reprenons la définition que nous avons donné des maths : *les mathématiques servent à simplifier le réel*. Certains objets mathématiques (pas toujours élémentaires) peuvent être considérés comme des simplifications d'objets ou de structures observés dans la nature, pour n'en garder que les aspects essentiels à l'étude d'une situation donnée.

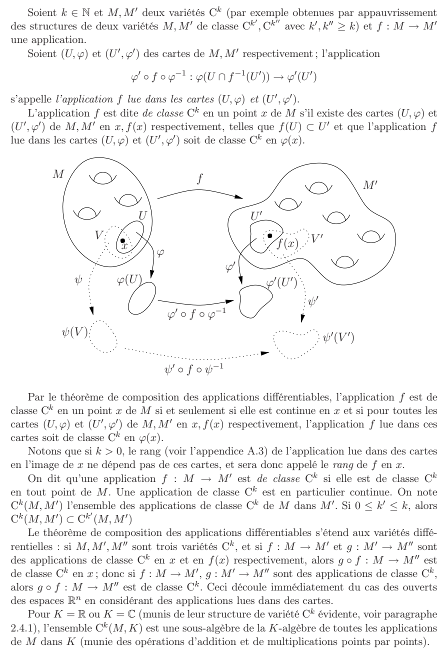


Fonction bijective

Ainsi, les objets mathématiques *primitifs* peuvent être vu comme des *idéalisations* d'objets naturels. Puis, on construit à partir de ceux-ci, parfois par pure curiosité intellectuelle, des objets mathématiques plus abstraits et semblant parfois fort éloignés de toute origine naturelle, qui deviennent eux-même sujet d'études, engendrant alors la création de nouvelles théories. De manière étonnante, ces objets plus sophistiqués deviennent parfois des sources d'inspiration pour les physiciens, leur permettant de modéliser plus finement le monde physique : peut-on alors les considérer comme naturels ? Ces interactions et échanges entre mathématiques fondamentales et physique sont un des aspects les plus fascinant des mathématiques. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

Il est à mon avis très sain de considérer, comme le dit Pierre-Louis Lions, « que les mathématiques n'ont rien de mystique : c'est un outil formidable qui se prête très bien à la compréhension de notre environnement tel que nous le percevons et qui présente l'avantage d'être à la portée du cerveau humain, puisque créé par celui-ci. Ce n'est pas un point de vue très glamour, certes, mais il a le mérite de démythifier une matière qu'on associe encore souvent à une forme de transcendance et qu'on imagine déconnectée des réalités les plus basiques, alors que c'est tout le contraire. »

Ce point de vue me plait beaucoup aujourd'hui, car il débarrasse les mathématiques d'un élitisme très malvenu, et qui est sans doute la principale source de l'incompréhension, et donc de la répulsion, qu'elles inspirent à l'école. En effet, attribuer une aura mystique ou transcendante aux mathématiques, c'est promouvoir l'opinion élitiste selon laquelle seuls quelques « élus » ont accès à la « vraie » connaissance mathématiques. Au contraire, accepter et promouvoir l'idée que les mathématiques sont une démarche *naturelle,* inhérente au fonctionnement humain, prouve qu'elles sont à la portée de tous, sous une forme plus ou moins sophistiquée, et en tout cas sous ses aspects les plus élémentaires, qui n'en demeurent pas moins riches et passionnant. Enseigner que les mathématiques sont un formidable outil de compréhension et de modélisation du monde qui nous entoure, indépendamment de tout aspect utilitariste, pourrait certainement réconcilier beaucoup d'élèves (et d'adultes !) avec les mathématiques. Les mathématiques à l'école (avec plus de géométrie plane !), ainsi éventuellement que les jeux mathématiques, peuvent (et doivent) être source de satisfaction pour n'importe qui acceptant de s'y prêter.



Soient $k \in \mathbb{N}$ et M, M' deux variétés C^k (par exemple obtenues par appauvrissement des structures de deux variétés M, M' de classe $\mathrm{C}^{k'}, \mathrm{C}^{k''}$ avec $k', k'' \geq k$) et $f : M \to M'$ une application.

Soient (U, φ) et (U', φ') des cartes de M, M' respectivement ; l'application

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(U')$$

s'appelle *l'application f lue dans les cartes* (U, φ) *et* (U', φ').

L'application f est dite *de classe* C^k en un point x de M s'il existe des cartes (U, φ) et (U', φ') de M, M' en $x, f(x)$ respectivement, telles que $f(U) \subset U'$ et que l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ') soit de classe C^k en $\varphi(x)$.

Par le théorème de composition des applications différentiables, l'application f est de classe C^k en un point x de M si et seulement si elle est continue en x et si pour toutes les cartes (U, φ) et (U', φ') de M, M' en $x, f(x)$ respectivement, l'application f lue dans ces cartes soit de classe C^k en $\varphi(x)$.

Notons que si $k > 0$, le rang (voir l'appendice A.3) de l'application lue dans des cartes en l'image de x ne dépend pas de ces cartes, et sera donc appelé le *rang* de f en x.

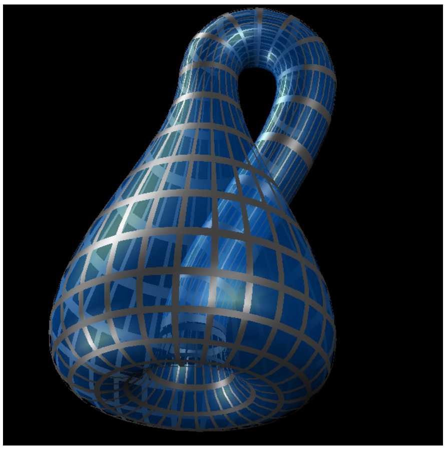
On dit qu'une application $f : M \to M'$ est *de classe* C^k si elle est de classe C^k en tout point de M. Une application de classe C^k est en particulier continue. On note $\mathrm{C}^k(M, M')$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans M'. Si $0 \leq k' \leq k$, alors $\mathrm{C}^k(M, M') \subset \mathrm{C}^{k'}(M, M')$

Le théorème de composition des applications différentiables s'étend aux variétés différentielles : si M, M', M'' sont trois variétés C^k, et si $f : M \to M'$ et $g : M' \to M''$ sont des applications de classe C^k en x et en $f(x)$ respectivement, alors $g \circ f : M \to M''$ est de classe C^k en x ; donc si $f : M \to M'$, $g : M' \to M''$ sont des applications de classe C^k, alors $g \circ f : M \to M''$ est de classe C^k. Ceci découle immédiatement du cas des ouverts des espaces $\mathbb{R}^n$ en considérant des applications lues dans des cartes.

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ (munis de leur structure de variété C^k évidente, voir paragraphe 2.4.1), l'ensemble $\mathrm{C}^k(M, K)$ est une sous-algèbre de la K-algèbre de toutes les applications de M dans K (munie des opérations d'addition et de multiplications points par points).

Cependant, quel que soit leur point de vue sur la nature des objets mathématiques, les mathématiciens reconnaissent que lorsqu'ils *font des maths*, ils donnent une certaine réalité aux objets avec lesquels ils travaillent, qu'ils leur donnent souvent une essence physique pour pouvoir s'amuser avec. Il y a donc ainsi un vrai plaisir à manipuler des objets étranges qu'a priori on a du mal à visualiser, à concevoir ; s'ils paraissent très abstraits à certains, le premier plaisir est de se les approprier en leur donnant une certaine "réalité" à force de les étudier et de les manipuler, puis à les utiliser pour résoudre des problèmes ou en résolvant des problèmes que l'on se pose sur eux. Ainsi le mathématicien est à la fois peintre surréaliste et joueur d'échec. Peintre surréaliste, car il crée, parfois par pur plaisir esthétique, des objets abstraits. Il devient ensuite joueur d'échec lorsqu'il cherche à résoudre les questions qu'il se pose sur les objets qu'il vient de créer. Mais la démarche se fait aussi dans l'autre sens, lorsque pour résoudre certains problèmes, le chercheur crée de nouveaux objets devenant alors des outils l'aidant dans son exploration. Ces outils peuvent ensuite à leur tour devenir des objets d'étude et ainsi de suite.

Finalement, les mathématiques nous offrent donc plus que ce que nous leur avons demandé ! Initialement moyen de comprendre le monde qui nous entoure, elles sont aussi une science autonome, se développant pour elle-même, en proposant de formidables défis intellectuels, tout en offrant un merveilleux espace de créativité.

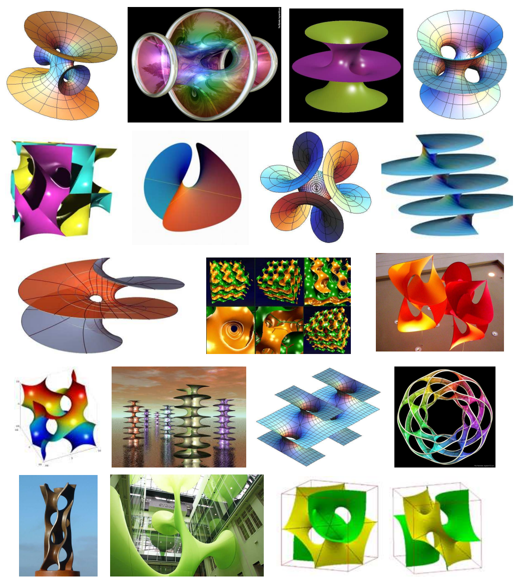


Une petite remarque au sujet d'un reproche souvent fait aux mathématiques, c'est-à-dire d'être trop abstraites, contrairement à la physique qui, soi-disant, s'intéresse à des objets très concrets. Nous l'avons dit, l'abstraction est un peu l'essence des maths. Mais parlons des objets de la physique d'aujourd'hui : êtes-vous capables de concevoir que notre univers est un espace à 4 dimensions que la matière courbe, espace soit infini soit fini mais sans bord, dans lequel existent des objets, les trous noirs au voisinage duquel le temps perçu par un observateur distant ralentit indéfiniment ? De l'autre côté, êtes-vous capables de concevoir que les constituants de la matière, comme l'électron, sont des objets qui ne sont ni vraiment des particules, ni vraiment des ondes, mais un peu des deux, qui ne sont jamais vraiment localisés, et que l'on n'étudie qu'à travers des probabilités ? Aujourd'hui, la théorie des cordes, qui tente d'unifier la physique quantique des particules et la relativité générale traitant de la gravité, conçoit que notre univers a 11 dimensions, certaines de ces dimensions étant très "petites" et "fermées", et que les constituants ultimes de notre univers sont des sortes de cordes vibrantes... Certains objets mathématiques apparaissent beaucoup plus concrets ! En fait aujourd'hui, la recherche physique porte sur des objets tels qu'ils rendent impossible une perception sensorielle directe ou même simplement aidée par la technologie. La physique a finalement rapporté ses objets d'étude à des images mathématiques, ou, vues autrement, les mathématiques sont devenues les microscopes ou les télescopes avec lesquels les physiciens scrutent le monde réel. Enfin, il faut absolument comprendre que jamais les mathématiques ne se fixent l'abstraction comme un but en soi, mais que les objets abstraits apparaissent parce qu'ils permettent une meilleure compréhension d'un problème en offrant un point de vue plus global. Ce qui est fascinant, c'est que les mathématiciens s'amusent à développer des théories dans leurs bureaux sans se préoccuper du monde réel. Pourtant, certaines de leurs théories se révèlent être une source d'inspiration 50 ans plus tard permettant d'expliquer ce qui est observé par les physiciens.

-3/ Du plaisir de faire des Mathématiques…

Faire des mathématiques, c'est créer des mondes merveilleux, et les explorer en s'affranchissant des contraintes du réel.

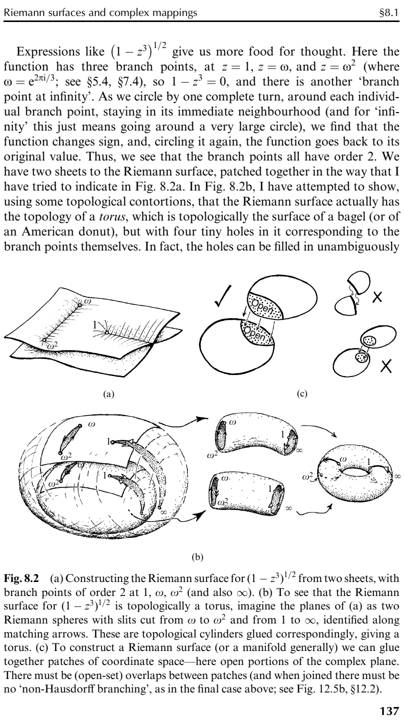
Les mathématiques sont un édifice extraordinaire. Elles offrent un espace infini de créativité, permettant l'invention d'objets et de théories, avec des éléments qui s'agencent de manière surprenante et miraculeuse. Elles sont ainsi une inépuisable source d'exploration et d'émerveillement. C'est un monde que l'on peut regarder comme une construction intellectuelle à laquelle on peut prendre part. On joue avec des objets difficiles à visualiser mais, à force de les manipuler, on finit par leur donner une essence, on les « voit ». Pour beaucoup de mathématiciens, le plaisir réside plutôt dans la résolution de problèmes : c'est parfois un long processus de recherche, d'essais et d'erreurs, avec, au bout, en cas de succès, une immense satisfaction. Pour d'autres, le plaisir est d'alterner création de théories et résolution de problèmes, l'un n'allant d'ailleurs pas sans l'autre.



Une sélection de surfaces minimales.

Si on ne peut pas vraiment faire de mathématiques de « haut niveau » sans s'y consacrer à plein temps, on peut néanmoins se faire plaisir à tous niveaux, il n'y a pas de « petites maths ». Chacun peut trouver dans les mathématiques une source d'amusement et de satisfaction. Ainsi, par exemple, la résolution de problèmes de géométrie élémentaire, ne nécessitant pas plus de connaissances que celles acquises au collège, peut offrir de beaux et riches défis.

Néanmoins, il est sans doute vrai que pour pouvoir apprécier pleinement les plus beaux paysages des mathématiques actuelles, il faut avoir acquis un bagage universitaire important, au moins une licence, et sans doute un master. C'est une des grandes difficultés lorsqu'on veut transmettre la passion des maths.


Riemann surfaces and complex mappings §8.1

Expressions like $(1-z^3)^{1/2}$ give us more food for thought. Here the function has three branch points, at $z=1$, $z=\omega$, and $z=\omega^2$ (where $\omega = e^{2\pi i/3}$; see §5.4, §7.4), so $1-z^3=0$, and there is another 'branch point at infinity'. As we circle by one complete turn, around each individual branch point, staying in its immediate neighbourhood (and for 'infinity' this just means going around a very large circle), we find that the function changes sign, and, circling it again, the function goes back to its original value. Thus, we see that the branch points all have order 2. We have two sheets to the Riemann surface, patched together in the way that I have tried to indicate in Fig. 8.2a. In Fig. 8.2b, I have attempted to show, using some topological contortions, that the Riemann surface actually has the topology of a *torus*, which is topologically the surface of a bagel (or of an American donut), but with four tiny holes in it corresponding to the branch points themselves. In fact, the holes can be filled in unambiguously

Fig. 8.2 (a) Constructing the Riemann surface for $(1-z^3)^{1/2}$ from two sheets, with branch points of order 2 at 1, ω, ω^2 (and also ∞). (b) To see that the Riemann surface for $(1-z^3)^{1/2}$ is topologically a torus, imagine the planes of (a) as two Riemann spheres with slits cut from ω to ω^2 and from 1 to ∞, identified along matching arrows. These are topological cylinders glued correspondingly, giving a torus. (c) To construct a Riemann surface (or a manifold generally) we can glue together patches of coordinate space—here open portions of the complex plane. There must be (open-set) overlaps between patches (and when joined there must be no 'non-Hausdorff branching', as in the final case above; see Fig. 12.5b, §12.2).

137

Faire des mathématiques, ce n'est pas aligner froidement des pages de formules et de calculs, bien au contraire ! L'activité mathématiques repose *essentiellement* sur l'imagination et l'intuition. L'intuition, c'est la capacité de notre cerveau à créer et à manipuler des images mentales approximatives d'un problème ou d'un objet, qui permettent ensuite progressivement, à l'aide du raisonnement logique, d'accéder à la résolution du problème ou à la compréhension des objets considérés. L'imagination, c'est la capacité de notre cerveau à fournir à notre intuition des images mentales. Le formalisme mathématique, ses symboles écrits, ses modes précis de raisonnement, sa rigueur, doivent être vus comme une aide à l'affinement de nos intuitions, à la vérification de leur justesse ; (et également comme un moyen « commode » (?) de transmettre les idées mathématiques). Selon sa nature, un mathématicien sera plus spontanément « formaliste » ou plutôt « intuitif », mais quel que soit sa nature, il devra toujours recourir au dialogue entre intuition et formalisme. C'est pourquoi je trouve si important l'utilisation des dessins et des schémas en mathématiques. (A gauche, des images des cahiers de travail du génial Roger Penrose.) De nombreux mathématiciens déclarent ainsi que les démonstrations « rigoureuses » de leurs théorèmes ne servent qu'à vérifier qu'ils les ont bien compris, qu'ils ont acquis « la bonne vision » ; (ce qui ne veut pas dire qu'obtenir ces démonstrations ne sera pas difficile !). De célèbres chercheurs, comme Michael Atiyah ou William Thurston, affirment que dans leur pratique de la recherche, l'intuition et l'imagination sont même plus importantes que les preuves formelles, ce qui indique bien que les maths ne sont pas une activité aussi « rationnelle » que l'on pourrait le croire. (Ces idées sont développées dans un livre original : «Mathematica» de David Bessis). Vous trouverez de belles illustrations de ces aspects visuels des maths sur la chaîne video de Michael Launay, ou sur le site « Image des Mathématiques » du CNRS.

Chacun doit pouvoir trouver son chemin d'accès personnel aux mathématiques. Comme pour la musique, chaque individu a plus d'affinités avec certains styles qu'avec d'autres. On peut être attiré par les maths pour les maths, par les maths quand elles permettent de calculer soi-même la trajectoire d'une comète autour du soleil, par des jeux mathématiques ou logiques, par les probabilités plutôt que la géométrie, par la beauté des fractals, par les maths à travers l'histoire, ou par leur lien avec la technologie, leur lien avec les sciences sociales, etc…

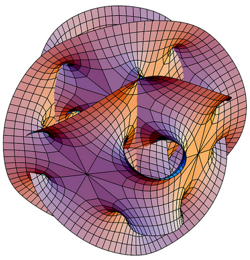
II - Mathématiques et Physique.

-1/ Les mathématiques, partenaire indissociable de la physique ?

Les mathématiques et la physique sont sans doute deux aspects d'un même plaisir intellectuel, une compréhension de l'univers qui nous entoure.

La physique tente de modéliser la nature pour, d'une part, chercher à en comprendre le fonctionnement, et, d'autre, part prédire son évolution ou du moins le résultat d'expériences qui portent sur elle. Il se trouve que c'est à travers les mathématiques que la Physique s'exprime le mieux, à travers elles que ses modèles sont le plus efficaces.

Les mathématiques, nous l'avons dit, cherchent à extraire des structures communes à divers aspects de la nature. Puis, une fois définies ces structures, les mathématiques s'amusent à les faire vivre puis à les questionner pour mieux les comprendre, quitte à s'éloigner de leur origine naturelle. Les mathématiques ont ainsi leur logique propre, et une immense partie des mathématiques se développe sans aucun lien avec la physique ni aucune volonté d'application concrète.



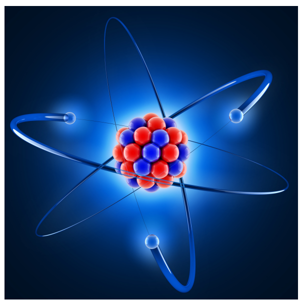
Mais il est fascinant de constater qu'après avoir évolué dans les mains (ou plutôt la tête!) des mathématiciens, des structures et des développements purement mathématiques peuvent revenir vers les physiciens pour leur offrir de nouveaux concepts avec lesquels ils pourront modéliser de nouveau la nature de manière plus précise et sophistiquée. Puis cet échange entre mathématiques et physique recommence, à un niveau toujours plus élevé, à partir de questionnements de la physique, ou parfois, d'ailleurs, des mathématiques.

Les Mathématiques et la Physique sont un vieux couple de géants. Leur histoire est indissociable. Quasiment toutes les branches des mathématiques ont pour origine historique, parfois lointaine, des questionnements physiques. Mais ces branches, devenant des sujets d'études pour les mathématiciens, constituent alors des pans autonomes de la mathématique, qui peut s'affirmer comme une science indépendante, au moins depuis le début du 19ème siècle. Ainsi, bien que des aller-retours permanents existent ainsi entre maths et physique, les mathématiques s'affirment également comme un jeu intellectuel développé par curiosité voire par plaisir. C'est cette dualité des mathématiques, entre activité intellectuelle désintéressée et partenaire essentiel de la physique fondamentale, qui surprend et interroge les philosophes, comme les mathématiciens et les physiciens d'ailleurs.

Théories physiques spéculatives et mathématiques sont aujourd'hui plus que jamais intimement liées. A ce sujet, il est amusant de citer le mathématicien Vladimir Arnold : "Les mathématiques sont la branche de la physique où les expériences ne coûtent pas cher." J'ai envie envie de répondre : " La physique est la branche des mathématiques où le matériel coûte cher."

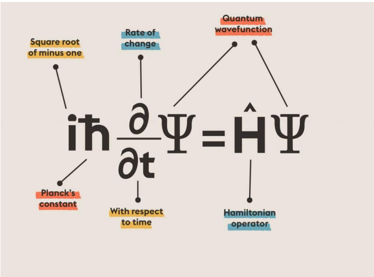
Les mathématiques loin d'être simplement « un outil », sont une des sources d'inspiration les plus fécondes des physiciens théoriciens.

-2/ Les mathématiques et la physique quantique.



La physique quantique, théorie physique visant à comprendre les interactions entre les particules élémentaires constitutives de la matière, est née au début du 20ème siècle. Les premiers modèles, autour de 1900, décrivaient alors les atomes comme des « collages » de petites billes, les protons et les neutrons, autour des quels tournoient d'autres petites billes, les électrons. Mais les physiciens découvrirent que ces petites « billes » ont également un comportement ondulatoire, la description de leurs propriétés ne pouvant être correcte en se limitant à leur aspect corpusculaire. Ils furent obligés de constater la nature duale, *onde-corpuscule*, des constituants de la matière.

Il apparut donc qu'une « image » basée sur notre expérience visuelle quotidienne n'était pas possible pour représenter correctement les atomes et les particules. Il fallut les immenses talents mathématiques de chercheurs, officiellement physiciens, tels Heisenberg ou Schrödinger (l'ami des chats), pour bâtir une description correcte des particules : cette description est purement mathématique, et *ne peut être que* mathématique (au moins en l'état actuel des connaissances, soyons modeste, mais c'est toujours le cas 100 ans après sa mise au point). Ainsi, les physiciens « voient » une particule comme une f*onction mathématique « vivant dans un espace de Hilbert »*. S'il n'est pas question ici de décrire précisément ces mathématiques, disons que les *espaces de Hilbert* furent inventé par l'immense mathématicien David Hilbert (1862-1943), dans le but de transposer à des ensembles de fonctions (au sens mathématique du terme fonction) des concepts géométriques, tels que la distance ou le produit scalaire (disons l'angle). Cette « invention » mathématique révolutionna « l'analyse des fonctions », branche centrale des mathématiques. Or c'est précisément grâce à ce concept mathématique, inventé environ 20 ans plus tôt, que les physiciens trouvèrent le « bon » moyen de décrire les particules. (On pourra écouter sur ce sujet une très jolie chronique d'Etienne Klein, « comment ne pas dessiner un atome ? »).

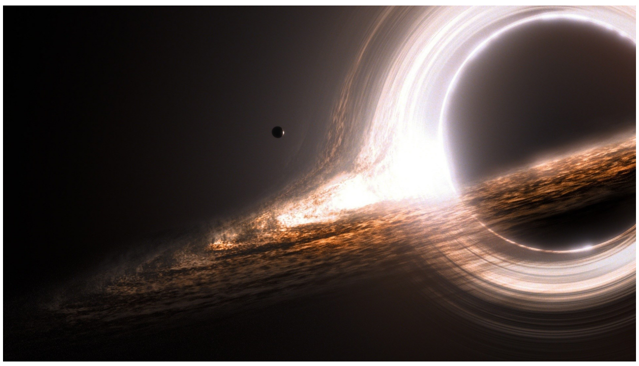


Il est donc tout à fait remarquable de constater qu'à une description sous forme de dessins ou de schémas, habituelle dans la partie expérimentale de la physique, les physiciens ont été contraints de substituer une « vision » purement mathématique des atomes et particules. On peut ainsi dire que les mathématiques sont le « sixième sens » des physiciens, venu suppléer les limites de nos sens habituels, et en particulier de la vision. Pour reprendre une phrase écrite précédemment, *la physique a finalement rapporté ses objets d'étude à des images mathématiques, ou, dit autrement, les mathématiques sont devenues les microscopes avec lesquels les physiciens scrutent le monde réel*.

Mais la puissance des mathématiques va plus loin. Car elles offrent également aux physiciens un pouvoir prédictif ! Ainsi, Paul Dirac, prix Nobel de physique, mais lui aussi immense mathématicien, se rendit célèbre grâce à la *prédiction* (vérifiée, d'où son prix Nobel) de l'existence de l'anti-particule de l'électron, le positron. C'est en effet en étudiant finement une équation mathématique, qu'il avait lui même mise au point pour décrire le comportement de l'électron, que Dirac découvrit que cette équation possédait une deuxième solution, qu'il identifia à une hypothétique particule de charge opposée à celle de l'électron. Il est particulièrement amusant de noter que de plus, c'est essentiellement par soucis d'esthétisme que Dirac décida que les deux solutions de son équation devaient représenter des particules, car il trouvait « laid » de devoir écarter de manière arbitraire la solution opposée à l'électron ; pour Dirac, seules de belles mathématiques peuvent être correctes !

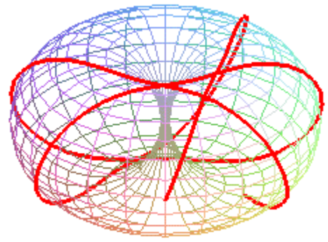
-2/ Les mathématiques et la relativité générale d'Einstein.

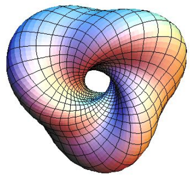
La plus belle illustration du lien extraordinaire entre mathématiques et physique est pour moi (choix peut-être subjectif, je l'avoue) offerte par la *relativité générale,* la théorie de la gravitation inventée par Albert Einstein.



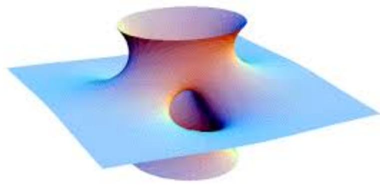
Cette théorie a non seulement fourni une description plus précise du mouvement des astres et des objets soumis à la gravitation, mais elle a *prédit* que l'univers devait avoir une évolution depuis un *big-bang*, et a prédit l'existence des légendaires trous noirs. La relativité a aussi fait apparaitre des phénomènes étonnants et a priori contre-intuitifs, comme le légendaire « paradoxe » des jumeaux, ou le ralentissement extrême des horloges au voisinage d'un trou noir. Le big-bang, les trous noirs, et tout ces phénomènes étranges, ont été découverts par les mathématiques avant d'être observés…

La relativité générale n'existerait pas sans la *géométrie différentielle,* branche des mathématiques qui utilise le calcul différentiel et intégral (c'est-à-dire les dérivées et les intégrales des fonctions, que les lycéens découvrent en première) pour faire de la géométrie. C'est un domaine des mathématiques qui définit des espaces géométriques de *dimension* quelconque, généralisant les courbes, de dimension 1, et les surfaces, de dimension 2. Ainsi, le fameux espace-temps de la relativité est un espace géométrique de dimension 4. Ces espaces géométriques de dimension quelconque ont été baptisés par les mathématiciens du doux nom de *variétés différentielles*. C'est aussi la géométrie différentielle, dans son extension appelée *géométrie Riemannienne* (du nom du mathématicien Bernhard Riemann qui à lui seul a révolutionné cette branche des mathématiques autour de 1850), qui permet de calculer sur ces espaces les chemins les plus courts, ou les plus longs dans certains cas, chemins qu'on appelle alors des *géodésiques*. Apparait alors la notion de *courbure* de ces variétés différentielles, notion que l'on peut sentir intuitivement en pensant à la courbure de la sphère par opposition à la platitude d'un plan.

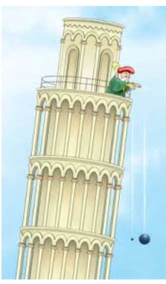




La géométrie différentielle est une branche de la géométrie issue de la découverte des géométries non-euclidiennes par Gauss et Riemann au 19ème siècle. Si certaines de ses motivations initiales étaient dues à des considérations physiques, datant parfois de l'antiquité, elle s'est développé à partir de Riemann de manière extraordinaire très loin au-delà des problèmes physiques qui l'avaient fait naître, de manière purement interne aux mathématiques, sans volonté aucune d'applications au monde physique.

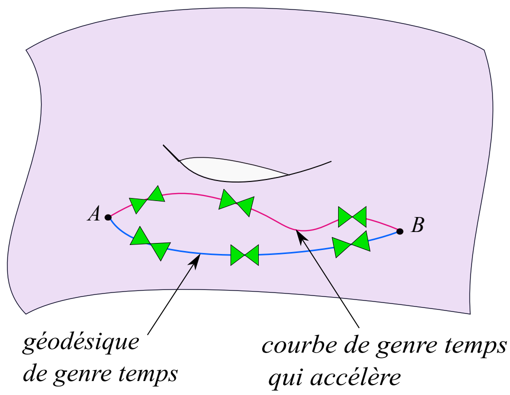


Ce qui est fascinant, c'est que c'est pourtant dans la géométrie différentielle qu'Einstein, 60 ans après les travaux de Riemann, a trouvé *l'inspiration* et les concepts nécessaires pour concevoir sa théorie de la gravitation…



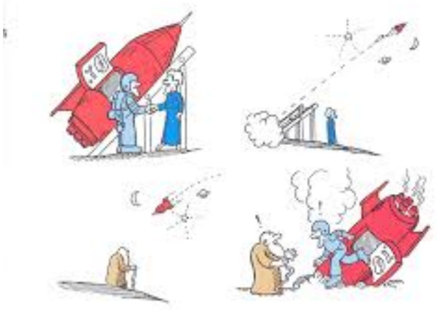
Einstein s'appuya sur un principe fondamental de la physique, le *principe d'équivalence*. Il en existe plusieurs formulations. Essentiellement, il stipule que tous les corps subissent la même accélération dans un champ de gravitation donné, indépendamment de leur masse et de leur composition ; « un kilo de plume tombe aussi vite qu'une tonne de plomb ». Une autre idée essentielle d'Einstein fut que la lumière devait être soumise à la gravitation, tout en se déplaçant à une vitesse limite et constante, indépendante de la source ou de l'observateur ; elle doit donc suivre des trajectoires particulières, qu'il convient de singulariser, et qui ne sont plus des droites.

Le point clef compris par Einstein fut alors qu'il fallait changer de « paradigme géométrique » : depuis Newton, il semblait naturel de modéliser l'univers par un espace euclidien. Mais c'est finalement un choix qui s'apparente à un postulat, et donc un *a priori* important. Pourquoi un espace fait de droites ? C'est un préjugé lourd, déjà remis en cause par les mathématiciens Gauss et surtout Riemann. Si le mouvement d'un corps soumis à la gravité n'est pas dû à sa composition interne, c'est que la cause du mouvement est étrangère à cette composition. *Le coup de génie d'Einstein a été de comprendre que le mouvement d'un corps soumis à la gravité ne devait pas être dû à la nature du corps lui-même mais* ***à la forme géométrique*** *de l'espace-temps dans lequel il « vivait »*. Ainsi, selon Einstein, toute masse déforme l'espace-temps, et en retour, les objets physiques doivent

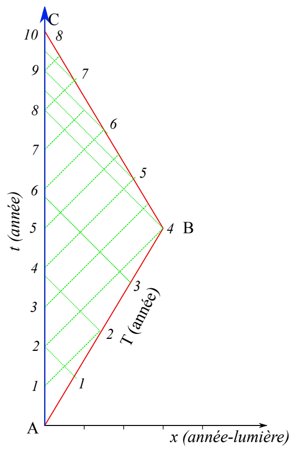


suivre les géodésiques de cet espace-temps déformé. Einstein est donc allé chercher les outils de la géométrie Riemannienne pour modéliser son fameux *espace-temps courbe*. Il a eu en effet l'idée révolutionnaire d'imaginer que l'espace-temps dans lequel on doit décrire le mouvement des objets n'était pas un cadre fixe, et « plat » comme dans la géométrie d'Euclide, mais un espace géométrique *courbe*, une *variété différentielle* de dimension 4, objet de base de la géométrie Riemannienne, dont la courbure est due à la présence de masse ou d'énergie (c'est la même chose d'après la célèbre formule E=mc^2), et où les trajectoires des objets soumis à la gravitation sont décrites par les géodésiques.

La théorie d'Einstein repose donc sur *le choix* d'un espace géométrique modélisant l'espace-temps, ce qui constitue en soi un *postulat,* tel qu'en font les mathématiciens lorsqu'ils construisent une théorie. Si l'idée d'utiliser un espace géométrique de dimension 4 était initialement révolutionnaire, *grâce aux mathématiques,* on peut aujourd'hui, avec le recul, considérer ce choix comme naturel : un événement physique est repéré par sa position dans l'espace *et* dans le temps. Ainsi, quand on veut mesurer des distances entre des phénomènes physiques, il faut penser à la distance spatiale et à la distance temporelle qui les séparent, et donc mesurer des distances dans un espace géométrique qui unit les deux. Mesurer des distances, c'est précisément faire de la géométrie. Voici quelques illustrations de la nature géométrique, mathématique donc, des phénomènes les plus spectaculaires de la relativité générale.

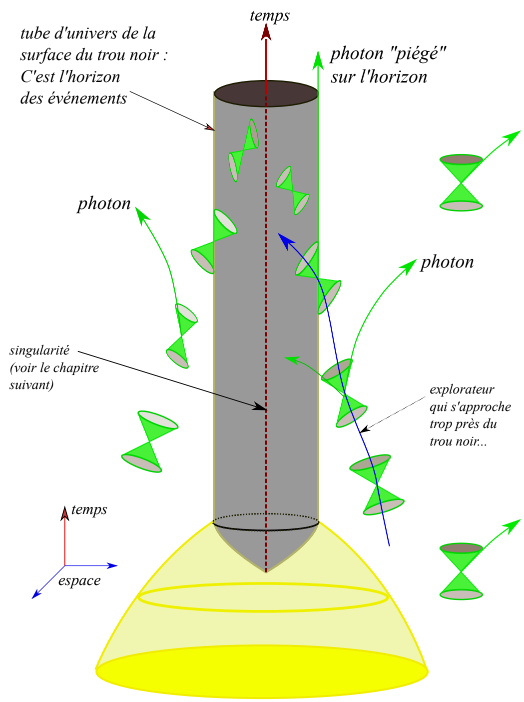


Le « paradoxe » des jumeaux est une célèbre expérience de pensée proposé par Paul Langevin en 1920. Elle imagine deux jumeaux dont l'un reste sur Terre pendant que l'autre fait un aller-retour en fusée jusqu'à une étoile lointaine. La relativité montre qu'à son retour, le voyageur sera plus jeune que le jumeaux resté sur terre. L'usage galvaudé de l'expression « tout est relatif », fort mal comprise, a fait dire à certain qu'il y avait paradoxe car par « relativité » le sédentaire a voyagé « relativement à la fusée », et devrait donc être lui aussi plus jeune lors des retrouvailles… Il suffit d'un petit schéma, (un triangle !), et d'un raisonnement *géométrique* rigoureux pour montrer qu'il n'y a aucun paradoxe : c'est bien le voyageur qui est plus jeune au retour. (Et cela a été vérifié à l'aide d'horloges transportées dans des avions, comparées à des horloges restées au sol !). La relativité générale montre aussi qu'un cosmonaute en orbite lointaine autour d'un trou noir verrait une horloge transportée par un collègue intrépide s'aventurant au voisinage de l'horizon de ce trou noir ralentir indéfiniment, jusque'à se figer sur l'horizon, alors que le cosmonaute transportant l'horloge la verrait toujours fonctionner normalement. C'est le phénomène de « dilatation temporelle » mis en scène dans le film Interstellar. Là encore, c'est un raisonnement géométrique, mais dans ce cas sensiblement plus sophistiqué, qui permet d'expliquer cet effet spectaculaire des trous noirs.



Il n'est donc pas possible de parler de relativité générale sans parler de géométrie. Les livres de vulgarisation qui prétendent le contraire sont malhonnêtes, et en plus ils font passer à coté de certains des aspects les plus fascinants de la relativité. La relativité générale, les trous noirs, le big-bang n'existeraient pas sans les mathématiques : les phénomènes surprenants de la relativité, tels que le paradoxe des jumeaux, les boucles temporelles, les trous noirs, les trous de ver, ne sont que des conséquences de l'étonnante géométrie de l'espace-temps. Dit autrement, *la gravitation, c'est de la géométrie !*

Les trous noirs illustrent merveilleusement l'étonnante capacité « d'anticipation » des mathématiques. Ces astres fascinants ont en effet été *imaginés* mathématiquement bien avant d'être observés. Ils apparaissaient comme *conséquence* des modèles géométriques découverts en cherchant des solutions



mathématiques aux équations d'Einstein, équations reliant la courbure de l'espace-temps à son contenu en masse et énergie. Il y eut longtemps beaucoup de réticence à accepter qu'ils puissent avoir une réalité physique. Les modèles théoriques de trous noirs, initialement perçus comme des curiosités mathématiques, se révélèrent, après l'accumulation de nombreuses évidences observationnelles, comme les moyens les plus « raisonnables » d'expliquer ce qui était perçu dans les télescopes, tels la rotation très rapide d'étoiles tournant autour de « très petits objets » faisant 4 millions de fois la masse du soleil.

Il en est allé de même du big-bang : il a d'abord été conçu par les mathématiques avant d'être confirmé par l'observation.

La théorie sur laquelle s'appuie la relativité est donc la géométrie Riemannienne. Les étudiants en physique abordent plutôt peu cette discipline mathématiques, ou alors assez tard. Ils sont donc souvent contraints à une vision assez technique de la relativité générale, leur permettant d'entrer rapidement dans des champs expérimentaux. Pour le mathématicien formé à la géométrie Riemannienne en revanche, la relativité apparait comme une théorie extrêmement élégante offrant des problèmes mathématiques difficiles et fascinants, mais qui de plus sont rattachés à des choses in fine observables, comme les trous noirs.

Einstein, que l'imagerie populaire aime présenter comme « mauvais en maths », était en réalité extrêmement fin et compétant. Il a appris la géométrie différentielle au moment où elle était encore une discipline complètement balbutiante. C'est vers 1910, sans répondre à des besoins observationnels, qu'une théorie purement mathématique l'a inspiré pour modéliser sa théorie de la gravitation. Son intuition, son exigence, l'ont conduit à mettre à jour une cohérence en physique dans les mesures de temps, de distance, et à une vision révolutionnaire de de ce que devait être la gravitation. Il a travaillé 10 ans pour trouver les bases conceptuelles qui lui ont permis d'établir la théorie de la gravitation. Einstein n'a jamais regardé dans un télescope !

-4/ En résumé…

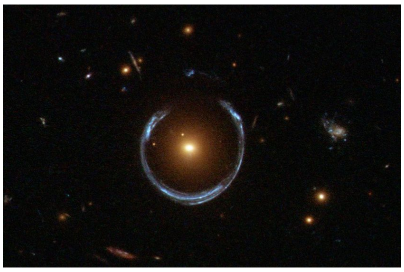
Nous voyons donc que le 20ème siècle a merveilleusement mis en évidence le rôle des mathématiques comme source d'inspiration de la physique. Non seulement, les mathématiques ont fournis, grâce à des travaux antérieurs et éloignés de toutes volonté d'application, les concepts nécessaires à l'élaboration de théories physiques *explicatives,* mais plus spectaculairement, par leur capacité générative interne, c'est à dire leur capacité à démontrer des théorèmes à partir d'axiomes bien posés, les mathématiques ont permis de *prévoir* des phénomènes physiques nouveaux et non anticipés.

Des chercheurs, "officiellement" physiciens, tels Einstein, Schrödinger, Dirac, et plus récemment Hawking, Penrose, Witten, étaient ou sont des mathématiciens exceptionnels. C'est leur compréhension profonde des mathématiques du 20ème siècle qui a permis leurs "découvertes" et la mise au point de leurs résultats en physique théorique. *Les Mathématiques restent - et resteront pour longtemps - un outil fondamental d'exploration de notre univers physique et intellectuel.*

Citons pour conclure un paragraphe d'un joli petit livre de R. Osserman, "les mathématiques de l'univers" : il parle de "la danse complexe que semblent exécuter inlassablement ces deux partenaires que sont la physique et les mathématiques. Tantôt elles sont collées l'une à l'autre, presque indiscernables, tantôt elles tournoient en s'éloignant l'une de l'autre sans cesser de s'observer de loin avec attention. »

-5/ *Mathématiques, Physique, Réalité.*

L'univers qui nous entoure est-il « vraiment » courbe ?



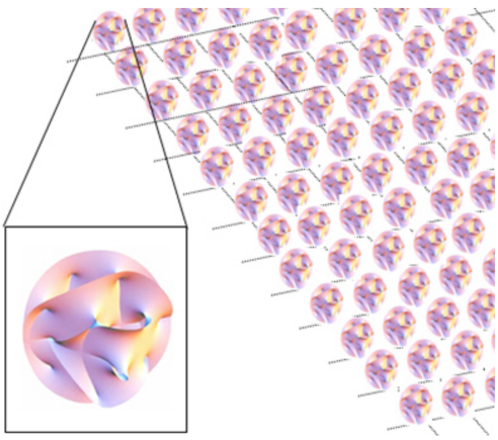
On observe effectivement la déviation des rayons lumineux lors de leur passage à proximité d'une concentration importante de masse : observation durant une éclipse d'étoiles normalement masquées par le soleil (expérience historique de 1919), photos de *lentilles gravitationnelles* (images déformées de galaxies situées en arrière-plan d'une concentration de galaxies massives), ou encore spectaculaire image du disque d'accrétion d'un trou noir super-massif au sein d'une galaxie éloignée. L'espace semble donc bien « courbé ».

De même « l'observation » d'ondes gravitationnelles produites par des catastrophes gravitationnelles comme la collision de trous noirs semble bien démontrer le caractère élastique de l'espace-temps.

Il convient néanmoins d'être prudent dans la distinction entre modèle et réalité… Nos capacités humaines de perception nous amènent à « voir » un espace à 3 dimensions, et à mesurer le temps séparément. Or le *modèle* d'espace-temps à 4 dimensions est absolument nécessaire pour une description et une interprétation correcte des observations mentionnées ci-dessus ; en particulier la « déformation » du temps due à la gravitation est essentielle dans cette description, mais nous paraissons bien incapables de l'observer directement. Nous « voyons » 3 dimensions, mais utilisons un modèle à 4 dimensions. (On « observe » bien la dilatation du temps due à la gravitation à l'aide d'horloges atomiques, mais c'est une observation a posteriori).

Ainsi, les mathématiques viennent suppléer nos sens physiologiques de perception. C'est précisément là que réside toute leur puissance. Si l'on considère que les mathématiques sont essentiellement inventées par l'esprit humain, et que la « réalité » se rapporte à nos cinq sens, il y a peut-être là une indication qu'il faut bien distinguer modèle et réalité.

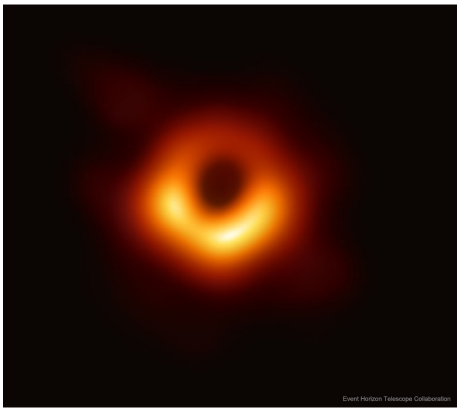
Allant plus loin, les recherches en physiques théoriques actuelles, dont l'un des enjeux essentiels est de réconcilier la relativité générale, théorie dite « de l'infiniment grand », avec la physique quantique, théorie dite « de l'infiniment petit », font appel à des concepts mathématiques très sophistiqués. En particulier, on y voit apparaitre pour modéliser « *notre* » espace-temps des espace géométriques comprenant 11 dimensions… Ce sont des théories issues des travaux fondateurs de deux physiciens mathématiciens des années 1920, Kaluza et Klein. La magie des mathématiques permet d'envisager des espaces géométriques de dimension quelconque sans aucune difficultés. Mais quel sens leur donner vis-à-vis de la réalité physique ?



Avec *l'espace-temps de Kaluza-Klein*, qui rajoute aux 4 dimensions « classiques » de l'espace-temps de la relativité d'Einstein des dimensions supplémentaires, on rentre dans le domaines des théories spéculatives très en vogue aujourd'hui. Comment considérer les dimensions supplémentaires de l'espace-temps de Kaluza-Klein ? Je pense que l'on peut adopter deux points de vue. Un, spéculatif et rêveur, l'autre plus pragmatique. On retrouve d'ailleurs ainsi les débats qui ont eu lieu, et existent encore, autour de l'interprétation de la mécanique quantique.

Du coté spéculatif et rêveur, on peut éventuellement dire qu'une "dimension" a une certaine réalité si on peut s'y déplacer. Ainsi, bien qu'elle nous semble particulière, on peut se "déplacer" dans le temps : on sait y avancer à différentes "vitesses" grâce au "paradoxe" des jumeaux, (au moins à l'aide de particules...) On peut considérer qu'un modèle d'univers à plus de 4 dimensions ne sera pertinent que si on arrive effectivement, selon un mode opératoire à définir, à se déplacer dans ces dimensions supplémentaires.

Mais on peut adopter une démarche plus pragmatique, en considérant qu'un modèle à plus de 5 dimensions est pertinent dés lors qu'il permet de rendre compte des observations et des expériences physiques, sans forcément définir pour l'observateur humain un accès aux dimensions supplémentaires. Les "dimensions" supplémentaires, éventuellement fictives d'un point de vue épistémologique, seraient justifiées par l'efficacité du modèle. Il est ainsi intéressant de noter que Roger Penrose, prix Nobel de physique 2020 et génial mathématicien, s'oppose dans plusieurs de ses écrits à "l'existence" de dimensions au-delà de 4. Pourtant, il a lui-même développé un modèle pour tenter d'unifier relativité générale et mécanique quantique, qui utilise des espaces géométriques de dimension 6… Notons au passage que le choix d'un espace géométrique pour décrire notre univers est un *postulat*, que seule la confrontation à l'expérience peut valider à posteriori.



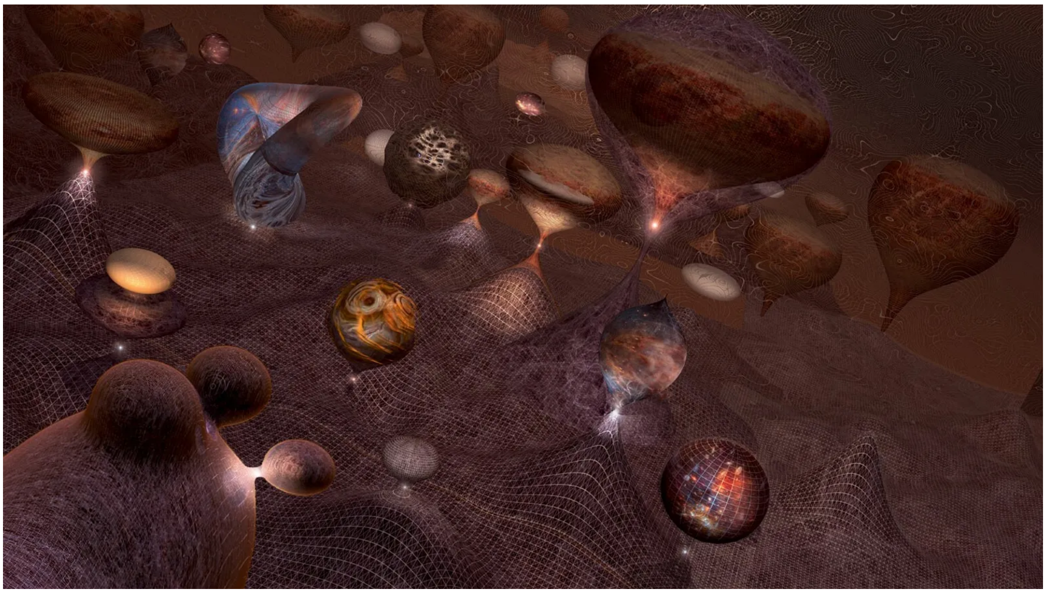
Là encore, cette discussion souligne le risque qu'il y a à confondre modèle et réalité. Prenons maintenant un exemple partant des mathématiques : la construction des nombres réels. Leur nom en révèle déjà l'ambiguïté. Les nombres réels complètent l'ensemble des nombres rationnels, les fractions de nombres entiers, avec des nombres comme $\sqrt{2}$ Ces nombres, *irrationnels*, peuvent être *approchés* autant qu'on le veut par des fractions, sans jamais être *atteints*. Ils ne sont définit que comme limite de certains processus mathématiques. Le nombre $\sqrt{2}$ a-t-il alors une "réalité" ? Les nombres réels sont pourtant indispensables au calcul différentiel, qui lui-même est incontournable en physique. Notons plus simplement que $\sqrt{2}$, c'est la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1. La légende veut que les Pythagoriciens, lorsqu'ils découvrirent l'irrationalité de $\sqrt{2}$, menacèrent de mort toute personne qui l'aurait révélée hors de leur cercle. Si l'on rajoute à cela les nombres *imaginaires*, définis à partir de l'introduction formelle de la racine carré de -1, indispensables en mécanique quantique, on est rapidement confronté au problème philosophique de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles »…

Une remarque en passant (suggérée par Martine Brillaud de la revue Tangente) sur les nombres et le monde réel. Nous l'avions mentionné dans la première partie, la théorie des nombres, l'étude des nombres entiers premiers, s'est développée essentiellement à partir du 17 siècle avec Fermat, Euler, puis au 18ème siècle avec Gauss, sans aucune considération d'application pratique. Pourtant, c'est justement le rapport au réel qui a ralenti le développement des théories autour des nombres entre l'antiquité et les travaux de ces chercheurs : la quantité zéro était initialement inconcevable, les nombres irrationnels qu'on ne peut raisonnablement pas trouver dans la nature devaient être manipulé avec réticence, puis les nombres négatifs sont d'abord considérés comme inadmissibles (une dette multipliée par une dette ne donne pas un gain ; le grand algébriste Al-Khwarizmi ne conçoit pas de manipuler des quantités négatives dans la résolution des équations). Que dire des équations du second degré où l'on additionne des aires et des longueurs ? (ce qui est d'ailleurs une mauvaise interprétation). C'est donc justement ce rapport au réel qui a freiné, à certaine période de l'histoire, la connaissance. Les nombres « complexes » ont d'ailleurs acquis le statut de nombre assez récemment dans l'histoire des mathématiques. C'est l'une des grandes révolutions mathématiques de la fin du 19ème siècle que d'avoir accepter de se libérer des contraintes du monde réel… tout en admettant y avoir un profond ancrage historique, même chez les chercheurs en mathématiques dites « pures ».

Plus fascinant encore, on peut parler de l'utilisation de l'infini mathématique en physique. La physique, nous l'avons dit, est indissociable des mathématiques, c'est à travers elles qu'elle s'exprime. La notion d'infini (dont une définition précise est fournie par les mathématiques depuis Cantor à la fin du 19ème siècle) apparait naturellement en physique, essentiellement par l'abondante et incontournable utilisation du calcul différentiel (basé sur les notions de dérivées et d'intégrales), appelé aussi *calcul infinitésimal*. On fait « tendre des fonctions vers l'infini », comme la courbure à l'intérieur d'un trou noir qui « tend vers l'infini ». Mais lorsque de tels infinis apparaissent, les physiciens savent qu'on atteint les limites des théories utilisées, car « l'infini » ne peut correspondre à une mesure acceptable d'une quantité physique. L'infini est donc interdit par les mesures physiques, mais toutes les théories physiques reposent sur la manipulation d'infinis mathématiques…

Par ailleurs, le nombre d'atomes dans l'univers est... 10^{80} . C'est énorme, mais ce n'est pas infini. Parler de nombre plus grand a-t-il un sens ? Pourtant, là encore, la description des atomes nécessite l'utilisation du calcul infinitésimal, et celui-ci s'appuie sur la manipulation de « quantités infinis ». C'est la force et la magie des mathématiques que de permettre cela, en définissant précisément cette notion de « quantité infini » (qui au passage n'est pas une quantité, mais plus exactement le résultat de limites de processus bien définis). On peut donc voir l'infini en physique comme un intermédiaire théorique nécessaire à l'utilisation d'outils et concepts mathématiques, mais tout résultat rapporté au monde physique doit être fini. Quoique… cette vision un peu tristounette ne correspond là encore pas toujours à la vision intuitive des physiciens : quid de la question « l'Univers est-il infini ? » (A laquelle Einstein répondait qu'il ne connaissait que deux choses infinis, l'univers et la bêtise humaine ; mais que pour l'univers il n'était pas sûr.)

Quelque soit notre conviction personnelle quant à la nature des objets mathématiques, les mathématiques servent bien à *simplifier le réel*, nous permettant de l'appréhender, malgré les limites de nos cinq sens, à l'aide de nos capacités cognitives. C'est peut-être alors dans notre cerveau que se rejoignent, grâce aux mathématiques, modèles et réalité.



III - La méthode scientifique.

-1/ Une méthode de sélection des idées.

La recherche scientifique est une quête, peut-être sans fin, une remise en question permanente face à l'observation, l'acceptation de l'erreur, et le refus du dogme. C'est ce qui la rend fascinante. Caricaturant à peine, un chercheur doit pendant la journée chercher à renforcer sa théorie et ses idées, et la nuit, chercher des contre-exemples ! Concernant par exemple la relativité, de nombreux chercheurs en relativité générale travaillent autant sur la relativité générale elle-même que sur des théories alternatives (théories tenseur-scalaires, théorie MOND...), permettant par exemple de se passer de l'hypothèse de matière noire.

On voit régulièrement dans la presse le « gros titre » suivant : « Einstein s'est trompé !! » Ces affichages racoleurs sont typiques des méthodes de vente des journalistes, dont quasiment aucun n'a de formation scientifique. (De notables exceptions sont Nicolas Martin (remplacée aujourd'hui par Natacha Triou) et sa remarquable émission « la méthode scientifique » sur france culture, et Mathieu Vidard avec « la terre au carré » sur france inter). Einstein ne s'est jamais "trompé", (même s'il a parfois commis des erreurs, qu'il reconnut ensuite, comme tout bon scientifique), au sens où sa théorie n'est pas "fausse". La théorie de la relativité générale devra un jour être remplacée par une théorie plus complète, rendant compte de phénomènes qu'elle ne peut expliquer. Mais cette nouvelle théorie devra expliquer ce dont la relativité générale rend compte, de même que la relativité générale permet de retrouver la théorie newtonienne comme théorie approchée, c'est-à-dire avec un champ d'application plus limité, ou des résultats de mesure moins précis.

La démarche scientifique est une méthode rigoureuse et bien définie de sélection des idées proposées pour décrire le monde qui nous entoure.

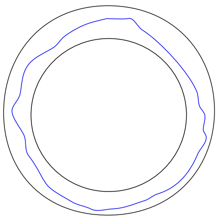
Elle repose donc sur la définition précise de critères de validation et de vérification. Pour la physique (ou la biologie), il s'agit de la confrontation à l'expérience, à l'observation, et de la capacité à prédire les résultats d'expériences répétées. Pour les mathématiques, science un peu à part, il s'agit de la vérification du respect d'une démarche logique bien posée et bien définie, à partir d'axiomes bien déterminés. Pour ces trois sciences, la vérification et la validation peuvent être difficiles et prendre de nombreuses années. Néanmoins, on considère qu'une théorie est scientifique si elle peut, au moins en principe, être réfutée d'après les critères de validation retenus (c'est le principe de Karl Popper). C'est pourquoi, par exemple, la théorie de Newton a "tenu" trois siècles avant de se révéler incomplète, car elle vérifiait toutes les observations effectuées, jusqu'à ce que les moyens d'observation permettent d'en détecter les limites. Ce qui ne l'empêche pas d'être encore utilisée abondamment dans son domaine de validité.

Lorsqu'une théorie est en contradiction avec ses critères de validation, elle est soit incorrecte, et doit alors être rejetée, soit, éventuellement, elle doit être complétée et/ou affinée. En revanche, lorsque des théories sont validées ou lorsque des faits sont établis en respectant cette démarche et ce processus de validation, elles ne peuvent plus être contestées, même si des recherches plus poussées peuvent éventuellement les affiner. Seules la mise en évidence d'erreurs dans leur validation, ou l'observation expérimentale de résultats les contredisant, peuvent les remettre en cause.
Toute théorie n'étant pas capable de se conformer à de tels modes de validation (comme l'astrologie, le créationnisme...) n'appartient pas au domaine des sciences, mais à celui de la croyance...

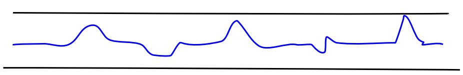
-2/ La science, domaine du doute, vraiment ?

On répète souvent que "la science, c'est l'école du doute", ou que la méthode scientifique, "c'est accepter la remise en question permanente". Certaines personnes en ont conclu qu'en conséquence toute affirmation scientifique n'était que provisoire, qu'elle pouvait toujours être remise en question. Ainsi Etienne Klein cite dans son ouvrage "le goût du vrai" l'exemple d'une célèbre professeure de philosophie de la Sorbonne qui, lors d’une conférence sur ce sujet, l’a interpelé en déclarant "la terre n’est donc ronde que jusqu’à ce qu’un nouvel Einstein démontre qu’elle est plate !"

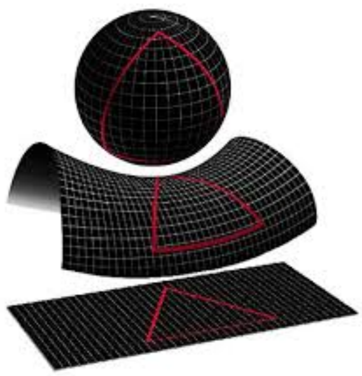
Les scientifiques intervenant dans des émissions ou des ouvrages de vulgarisation, se sont fait "piéger" par leurs propres explications de ce qu’est la démarche scientifique, voulant mettre en avant la modestie et la prudence qu’implique leur activité. Or, il ne faut pas confondre le doute, le questionnement, les remises en cause, inhérentes à la démarche de recherche, avec les faits scientifiques établis qui constituent le *corpus* de la science. En effet, selon la méthode scientifique que nous avons défini plus haut, un fait, une fois validé selon la méthode retenue, éventuellement dans un domaine d’approximation clairement définie, ne peut plus être contesté. Il pourra éventuellement être affiné, en obtenant une meilleure précision. Il ne pourra éventuellement être contesté et remis en cause que si l’on définit d’autre critères de validation, ou si l’on exige une précision supérieure que la théorie utilisée ne permet pas. Il faut donc en particulier noter l’importance de bien définir les objets et de bien poser les questions.



Illustrons cela, de manière triviale, par le « débat » sur la rotondité de la terre que certains individus contestent encore… Que signifie de dire que « la terre est ronde » ? Pour commencer, on voit bien que la terre n’est pas parfaitement ronde (on dit sphérique, c’est plus classe) : il y a des montagnes et des crevasses. Il faut donc préciser : la terre est « approximativement » sphérique si l’on néglige les irrégularités disons sur 10 Km. Une manière encore plus précise de le dire est « d’encadrer » la surface de la terre entre deux sphères parfaites : on dira ainsi que la surface de la terre est approximativement sphérique de rayon 6370Km avec une précision de 100Km si l’on peu la coincer entre deux sphères, l’une à l’intérieure avec un rayon de par exemple 6320Km, et une à l’extérieure avec un rayon de 6420Km. On pourra dire que la surface de la terre est plate si on peut coincer cette surface entre deux plans parfaits, séparé de 100 Km. Bien qu’on puisse la débattre, c’est une définition précise, avec une précision donnée et bien définie. Elle permettra donc une réponse précise et la classification de la surface terrestre dans l’une des deux cases, *à l’exclusion de l’autre*. Brisons tout de suite un suspens insoutenable: toutes les expériences réalisées depuis 3000 ans permettent de classer sans l’ombre d’un doute la terre dans la case « surface approximativement sphérique ».



Je ne résiste pas au plaisir de faire remarquer qu’il n’est absolument pas besoin d’aller dans l’espace prendre des photos pour le démontrer, il suffit d’utiliser de belles mathématiques ! En effet, ce qui différencie géométriquement la sphère du plan, c’est sa *courbure :* la courbure d’une surface se définit à partir de la somme des angles d’un triangle tracé dessus à l’aide de géodésiques, c’est à dire du plus court chemin reliant deux points. Ainsi, plantez trois piquets (très éloignés !) sur la terre, tendez des élastiques entre eux, mesurez les angles aux sommets, faites la somme. Si vous trouvez exactement 180 degrés, c’est un plan ; si vous trouvez *plus* de 180 degrés, c’est une sphère, si vous trouvez moins, c’est une selle de cheval. Evidemment, j’abuse un peu car dans la pratique c’est difficile à faire, mais c’est bien à partir d’idées similaires, *mathématiques*, que



les grecs, dès l'antiquité, en plantant des bâtons dans le sol et au fond de puits, et en mesurant des ombres, avaient déjà prouvé la sphéricité de la terre, en évaluant son rayon avec une précision stupéfiante.

-3/ Qu'est-ce qu'un scientifique ?

J'aimerais proposer mon point de vue sur ceux qu'on devrait appeler "les scientifiques". Il apparait souvent qu'on ne qualifie de scientifiques que les chercheurs. Si ceux-ci méritent évidemment pleinement ce titre, je pense qu'il faut l'élargir à tous ceux qui participent, d'une manière ou d'une autre, au développement de la science. Ainsi je pense que doivent être considéré comme scientifiques, dans une discipline donnée, quatre catégories de personnes :

- ***Les chercheurs*** : bien sûr, ce sont ceux qui explorent et élargissent leur domaine de connaissance.

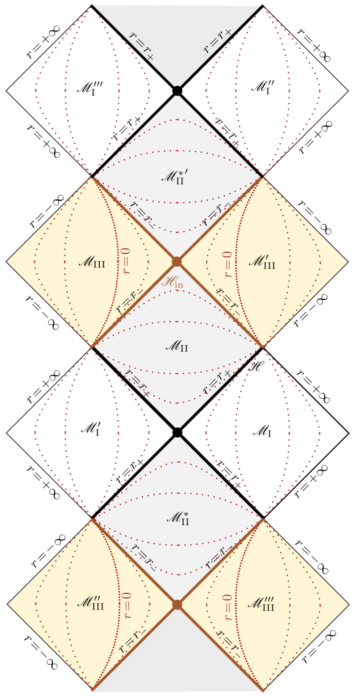
- ***Les ingénieurs*** : ce sont ceux qui utilisent leur domaine scientifique pour des applications technologiques.

- ***Les enseignants :*** Ce sont ceux qui transmettent les connaissances de leur domaine, établies par les chercheurs et les ingénieurs. Ils doivent également susciter l'intérêt, voire la passion, et détecter et orienter les talents. Pour bien la transmettre, ils doivent évidemment maitriser leur science. Ce sont des scientifiques à part entière, car sans eux, il n'y aurait pas de sciences !

- ***Les passeurs de sciences*** : (ou vulgarisateurs, terme moins joli) Il apparait qu'au XXI-ème siècle la confiance dans la valeur de la science est sérieusement menacée. La science ne pourra donc plus se développer sans y associer chaque citoyen, en lui apportant les connaissances nécessaires à la compréhension de la démarche scientifique, en lui redonnant confiance dans les faits scientifiques établis, en lui donnant les moyens de faire une analyse critique et raisonnée des choix nécessaires à l'évolution future de notre société, comme les choix écologiques, les choix face à une pandémie, et, au-delà, les choix moraux pour l'organisation des sociétés, dont beaucoup sont orientés entre autres par des progrès technologiques (réseaux sociaux, internet, protection de la vie privée, énergie nucléaire). Le travail des (vrais) passeurs de science devient essentiel pour combattre l'obscurantisme qui menace l'humanité du 21-ème siècle. Les passeurs doivent aussi susciter les vocations chez les futurs scientifiques. Pour bien passer leur science, il doivent évidemment la maitriser suffisamment, c'est pourquoi ce sont des scientifiques !

Les deux parties suivantes sont extraites de mon livre « voyage dans les mathématiques de l'espace-temps ».

IV - De l'intérêt de la recherche fondamentale.



Très souvent, on demande à celui qui fait des mathématiques, "à quoi ça sert ?" Curieusement, on ne pose pas cette question à celui qui fait de la peinture, de la musique, de l'histoire ou de la littérature ! Peut-être parce que beaucoup ont eu l'impression qu'on les faisait souffrir avec les maths à l'école... Le simple fait que les maths procurent un plaisir intellectuel à certains devrait suffire à les justifier. Mais reconnaissons que c'est une réponse un peu courte. Tout le monde sait que les maths interviennent dans de nombreux domaines comme la physique en particulier, mais aussi la biologie et l'informatique, ou même, de manière moins désintéressée, l'économie. Il semble donc que la question porte sur le fait de faire des maths dites "pures", c'est-à-dire qui ne s'intéressent pas aux applications possibles.

A partir du moment où l'homme a cherché à compter et à mesurer les objets qui l'entourent, on peut dire qu'il a commencé à faire des maths. Historiquement donc, il est raisonnable de dire que toutes les branches des mathématiques furent à l'origine stimulées par des problèmes pratiques, comptables pour l'arithmétique, agricoles pour la géométrie, physiques pour l'analyse. La physique s'est dès l'origine et jusqu'à aujourd'hui imposée comme la plus grande source de développement des mathématiques : l'astronomie dès l'Antiquité, l'étude du mouvement pour l'analyse à la Renaissance, en particulier le calcul différentiel dont nous avons parlé, et encore aujourd'hui pour de nombreux domaines. Mais une fois créées les théories mathématiques pour résoudre ces problèmes physiques, certains chercheurs développent ces théories par pure curiosité intellectuelle. Ils posent de nouvelles questions purement mathématiques au sujet des objets créés pour les physiciens, développent de nouvelles théories pour y répondre, cela en créant de nouveaux objets mathématiques, qui deviennent à leur tour des sujets d'étude et de problèmes, et ainsi de suite...

Ce processus de développement interne des mathématiques est extraordinairement prolifique. Ainsi, nous l'avons déjà dit, sans même parler des mathématiques appliquées, il y a eu plus de théorèmes démontrés et donc d'objets et de théories mathématiques créés au 20-ème siècle que dans toute l'histoire précédente. Mais le plus extraordinaire c'est qu'inversement, des théories et objets mathématiques deviennent, après un long développement purement mathématique et sans volonté d'application, une source d'inspiration pour les physiciens qui y puisent des concepts et des méthodes leur permettant de progresser dans leur description du monde réel. L'exemple le plus célèbre est celui de la relativité générale d'Einstein, qui a utilisé des outils mathématiques développés 50 ans auparavant pour résoudre des problèmes purement mathématiques. Cela est encore arrivé après avec la physique quantique et continue de se produire aujourd'hui au niveau le plus élevé de ce qu'on appelle d'ailleurs la physique mathématique. On en est arrivé en fait à de véritables allers-retours entre les maths et la physique, chacune étant source de questions comme d'inspiration pour l'autre.

Ainsi, bien que cela ne l'explique pas, l'histoire prouve qu'il y a un intérêt à faire des maths pures. Néanmoins, il est vrai que l'utilisation de certaines théories mathématiques "pures" peut intervenir très longtemps après leur création voire même jamais. Faut-il alors ne faire que des mathématiques qui ont au moins une chance d'être un jour "utiles" ? Ce serait une grave erreur. D'abord parce qu'il est très difficile et souvent impossible de savoir si une théorie va trouver un jour une application. Ensuite parce qu'une théorie sans application peut permettre, en suggérant de nouvelles méthodes, de progresser dans une autre théorie. C'est là d'ailleurs un point fondamental à comprendre au sujet des mathématiques : elles semblent sectorisées en différentes branches (algèbre, analyse, géométrie, topologie, etc...) mais en fait elles forment un tout, chaque domaine étant nécessaire au développement et à la compréhension des autres. On peut dire en fait que bien souvent la recherche fondamentale consiste à chercher petit à petit, à travers l'étude de problèmes localisés, une meilleure compréhension globale.

Enfin, que l'on croit que les mathématiques sont inventées ou découvertes, il y a dans le travail de recherche de l'imprévu et des découvertes inattendues. Ainsi, pour prendre un exemple simple, imaginons qu'un chercheur veuille prouver qu'une certaine équation différentielle a une solution parce qu'au départ il a de bonnes raisons de penser qu'il en existe effectivement. Il se peut très bien qu'en tentant de démontrer cette existence, il découvre en fait qu'il n'en existe pas, c'est-à-dire qu'il démontre précisément qu'il n'existe pas de solutions à son équation. Suivant la nature du problème, ce résultat a priori négatif peut en fait amener de nouvelles questions et déboucher sur de nouveaux théorèmes auquel le chercheur ne pensait pas au départ. Cette situation est fréquente et a effectivement débouché sur de grandes théories. Cette part "d'imprévu" est un côté fascinant des mathématiques.

La conclusion de cela est qu'il est très difficile de fixer des objectifs à la recherche fondamentale, contrairement à ce que croient les "politiques" qui sont trop souvent complètement ignorants de ce qu'est la démarche scientifique. Bien sûr, les chercheurs se fixent des objectifs, mais il faut pouvoir s'en écarter pour faire parfois de grandes découvertes. Imposer un carcan et des objectifs d'applications à la recherche fera à coup sûr passer à côté de très nombreux résultats, l'histoire et un peu de réflexion sur le fonctionnement de la recherche le prouvent.

De nombreux exemples montrent en effet que la recherche fondamentale aboutit souvent à des applications inattendues et pourtant importantes : le laser est issu des travaux de recherche fondamentale sur l'interaction lumière-matière. La découverte de la pénicilline a été complètement fortuite.

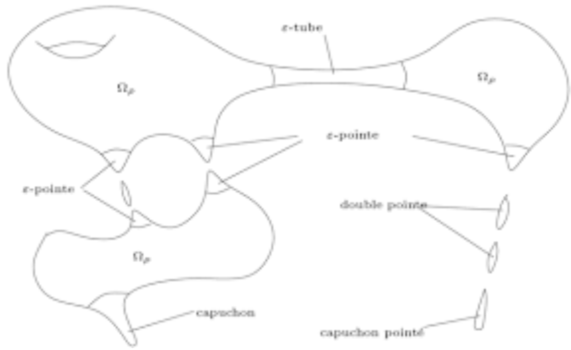
Les mathématiques offrent également de nombreux exemples de découvertes inattendues, ou dont la portée dépasse de loin les objectifs initiaux. Par exemple, le problème de Yamabe concerne un problème « d'existence de métriques aux propriétés de courbure particulières sur certaines variétés ». Yamabe annonça dans un article, paru dans les années 1960, l'avoir résolu. Mais on découvrit quelques temps plus tard une erreur dans son argument. Il fallu près de 30 ans d'efforts de plusieurs mathématiciens pour parvenir à prouver effectivement le résultat annoncé par Yamabe, ceci en mettant au point des méthodes allant bien au-delà des techniques qu'il avait utilisé dans son article.

Plus célèbre, le grand théorème de Fermat : le mathématicien toulousain Pierre de Fermat annonça dans une petite note en marge d'un de ses cahiers avoir prouvé que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

ne pouvait avoir de solution en nombres entiers (non nuls) dès que $n \geq 3$. Il fallut 350 ans et les efforts de centaines de mathématiciens pour qu'en 1997, après 7 ans de travail acharné, dans un isolement quasi complet, Andrew Wiles, mathématicien anglais, finisse par apporter la preuve de cet énoncé, en développant des méthodes, des outils et des objets, dont la portée dépasse de très loin l'intérêt du théorème annoncé par Fermat.

Dans un ordre d'idée similaire, Poincaré proposa en 1907 une conjecture de géométrie portant sur une propriété de la sphère de dimension 3. Pendant 100 ans, les mathématiciens tentèrent de démontrer cette conjecture en utilisant les méthodes du domaine mathématique auquel elle appartient, la topologie algébrique. Grigori Perelman, mathématicien russe s'étant totalement coupé pendant 8 ans de la communauté scientifique, apporta la preuve de la conjecture de Poincaré en ressortant les travaux du mathématicien anglais Hamilton, travaux abandonnés car n'ayant pas obtenu de succès, et considérés trop éloignés du domaine de la topologie algébrique. Les méthodes de Hamilton et Perelman appartiennent à une branche d'analyse "dure", les équations aux dérivées partielles sur les variétés. Il est fort peu probable qu'un organisme d'orientation de la recherche aurait pu parier sur le succès de ces méthodes. Et pourtant, ces méthodes en apparence très éloignées du problème de Poincaré, finirent par permettre à Perelman de démontrer un résultat beaucoup plus général que la conjecture de Poincaré, dont celui-ci n'est qu'un corollaire. Mais surtout, comme pour le théorème de Fermat, les méthodes développées par Hamilton et Perelman ont une portée et des applications qui dépassent de très loin leur utilité pour prouver le résultat initialement cherché. Les méthodes de Wiles et Perelman sont aujourd'hui appliquées à la résolution de nombreux problèmes difficiles et se développent dans de nombreux domaines des mathématiques éloignés de leur champ d'application originel.



Enfin, les grandes avancées réalisées par les plus grands chercheurs s'appuient bien souvent sur les travaux de nombreux autres. La prouesse consiste souvent à tirer d'une multitude de résultats une vision globale et unificatrice, qui permet alors de faire de grands progrès. C'est souvent alors que la recherche fondamentale finit par trouver des applications.

Ainsi, ce que les gouvernements actuels n'ont pas compris, c'est que pour que la science avance, il faut beaucoup de chercheurs, et des chercheurs qui soient libres, même si cela coûte cher. Un pays qui se prive de recherche fondamentale est à coup sûr un pays en voie de sous-développement. Cela risque d'être bientôt le cas des pays d'Europe et des USA.

Pasteur, qui s'y connaissait en recherche appliquée, disait "*il n'y a pas de recherche appliquée, il n'y a que des applications de la recherche fondamentale*".

V - Des Mathématiques et de la vulgarisation.

Les mathématiques sont une partie majeure de la culture et du développement de la connaissance humaine. Notre description du monde, en particulier par les sciences physiques, passe par les mathématiques. Pourtant, elles souffrent d'une image particulière et malheureusement essentiellement négative. En France, leur utilisation comme moyen de sélection scolaire, stupide et niant par là même leur essence profonde, a écœuré plus d'un élève. Les soit-disant intellectuels, ceux qui "écrivent dans les journaux" ou les membres de la classe politique, sont systématiquement très ignorants du fonctionnement des sciences; de fait, intellectuel semble signifier "littéraire ou économiste", jamais scientifique. Apparemment les scientifiques n'utilisent pas leur intellect ? Du coup, les sciences, mathématiques et physique fondamentale, sont très souvent dénigrées par ces pseudo-intellectuels. Il n'y a qu'à relire les propos consternant de certains ministres de l'éducation contestant l'utilité d'apprendre des mathématiques au lycée, ou prétendant qu'il n'y a plus besoin de mathématiciens. Il n'y a qu'à observer toute la presse pour constater la part dérisoire occupée en france par l'information scientifique; (il est à noter à l'opposé, le nombre très élevé d'émissions scientifiques de très grande qualité produites et diffusées par la BBC anglaise). Enfin, le ministère de la culture traite de tout, sauf de science. Il est d'ailleurs édifiant de constater le nombre de "célébrités" déclarant avec une immense fierté leur nullité en maths. Ils opposent alors leur réussite sociale à leur nullité en maths, essayant ainsi de prouver indirectement l'inutilité des mathématiques. On ne retrouve pas un tel biais dans la culture anglo-saxonne. S'il n'y a aucune honte à n'avoir aucune affinité avec les maths, on ne peut que regretter de passer à coté d'une part aussi importante des connaissances. Se vanterait-on ainsi de ne pas savoir lire ou de détester la musique ?

Pourtant, les mathématiques sont une part fondamentale de la culture humaine, une de ses plus immenses réalisations. Toute l'évolution scientifique et technologique de l'humanité s'est construite sur le développement des mathématiques. Ces brillants intellectuels qui écrivent leur mépris des mathématiques sur leur ordinateur en envoyant des SMS sur leur smart-phone sont incapables de comprendre que ces outils n'existent que grâce aux mathématiques et au physiciens théoriciens qui s'en sont servi pour développer la science permettant à ces technologies d'émerger.

Il serait donc grand temps de replacer la physique et les mathématiques au milieu du bagage culturel que doit posséder tout citoyen, au même titre que la musique ou la littérature. Si un ministère des sciences a pour rôle de réfléchir sur l'enseignement des sciences, un ministère de la culture devrait aussi se préoccuper du bagage culturel scientifique. Au delà, les choix fondamentaux de société que doivent faire les citoyens aujourd'hui concernant l'écologie, comme pour le nucléaire par exemple, sont fondamentalement des choix scientifiques. Le minimum de connaissance nécessaire est en réalité assez élevé. Pourtant, le fossé se creuse de plus en plus entre les connaissances scientifiques actuelles, et celles de la population. Il ne s'agit pas pour tout le monde de devenir scientifique de haut niveau, car l'investissement en temps et en effort est considérable, mais pour chacun d'acquérir un bagage minimum permettant de connaître à peu près l'état actuel des connaissances scientifiques, pouvoir faire des choix citoyens sur les sujets les nécessitant, et surtout accepter d'avoir du respect et non de la défiance à l'égard de ce qui est un pan essentiel de l'activité humaine.

Cela doit passer par l'apprentissage systématique à l'école de ce qu'est la démarche scientifique : la démarche scientifique, c'est savoir prendre le temps d'analyser en profondeur un problème, explorer divers pistes, refuser le dogme, accepter l'erreur et la remise en question. C'est aussi l'acceptation de faits lorsqu'ils sont établis en respectant des critères de validation précis, propres à cette démarche. Et surtout, la science c'est prendre plaisir à comprendre, à explorer, jusqu'à découvrir ou obtenir le résultat recherché. En cela, elle est manifestement à l'opposé de la démarche politique ! La démarche scientifique m'apparaît pourtant fondamentale pour tout citoyen.

Les mathématiques ne doivent pas effrayer. Au contraire, elles doivent s'admirer comme une des plus belles réalisation humaine. Certes, il est difficile sans effort d'en percevoir toute la beauté et la magie.

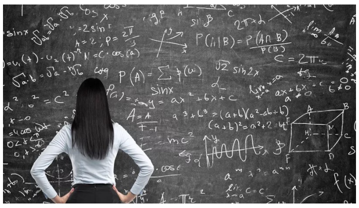
Mais on peut quand même, avec un peu de volonté et en abandonnant son appréhension, (issue bien souvent de la sélection scolaire), en apercevoir quelques aspects esthétiques et ludiques. On peut acquérir une certaine sympathie à leur égard, sans pour autant être obligé d'avoir envie d'en faire. Si vous savez compter aussi bien des pommes que des voitures, si vous faites la différence entre un ballon de plage et une bouée canard, vous faites déjà des mathématiques très abstraites, en l'occurrence de l'arithmétique et de la topologie. Laissez vous émerveiller par des formules pleine d'intégrales comme par un tableau abstrait. On pourra ainsi lire avec plaisir le livre de Cédric Villani, "Théorème vivant". Et puis, contrairement à ce qu'on croit, les maths ce ne sont pas que des « formules », c'est au moins autant des dessins, des schémas, des figures !

Concernant plus précisément les ouvrages de vulgarisation sur la physique, il est regrettable que leurs auteurs cherchent trop souvent à en exclure les mathématiques, de peur d'effrayer le lecteur. Pourtant, ce lecteur est à priori quelqu'un qui s'intéresse aux sciences. Or comme nous l'avons dit au début de ce texte, mathématiques et physique sont indissociables. Curieusement, quand certains auteurs parlent de la physique de Newton, ils n'hésitent pas à mettre quelques formules. Pourtant il s'agit bien de mathématiques, qui étaient à l'époque du plus haut niveau (le calcul différentiel a été inventé par Newton et Leibniz au même moment). Cependant quand ils veulent parler de bigbang, de trous noirs, ou de particules, il ne veulent surtout plus en mettre. Or les théories correspondantes (relativité et mécanique quantique) sont fondamentalement mathématiques, dans leur expression mais aussi dans les concepts sur lesquels elles s'appuient. Ne pas parler de mathématiques sur ces sujets, c'est en dissimuler une part essentielle. Même si cela complique le travail de vulgarisation, il faut dire clairement que des mathématiques sont fondamentalement présentes, à quoi elles ressemblent, l'époque à laquelle elles appartiennent (en l'occurrence la nôtre), pour faire comprendre que les maths continuent à se développer en même temps que la physique, et qu'elles sont indissociables.

VI - Enseignement et Mathématiques.

L'enseignement des mathématiques est l'objet de débats sans fin, et souvent caricaturaux. Je propose ici quelques réflexions personnelles, qui n'engagent que moi ! Certaines d'entre elles semblent néanmoins partagées par de nombreux enseignants et mathématiciens…

- *Un constat affligeant*



L'enseignement des mathématiques à l'école est actuellement fondé sur une vision purement utilitariste et sur une sélection par une pseudo-performance mesurée par la rapidité d'exécution d'exercices stéréotypés. Cette « pédagogie » est par ailleurs associée à l'abus de notes aux conséquences pédagogiques totalement destructives. Cela ne peut qu'empirer le constat déjà désastreux du niveau de compétence en mathématique des étudiants, en conduisant au rejet d'un nombre considérable de jeunes qui aurait pu faire de bons mathématiciens ou scientifiques.

Cette vision de l'enseignement est en partie due à une dérive du système d'accès aux « grandes écoles » et aux prépas associées, système qui ne vise plus l'épanouissement des élèves mais bien plutôt l'accès à un certain « statut social », indépendamment de toute recherche d'une motivation pour un domaine scientifique ou technique bien défini. L'accession à une grande école devient une fin en soi, sans considération pour ce que l'élève en fera ensuite. Il n'y qu'à voir le nombre considérable d'élèves sortant de grandes écoles où leur a été offert un enseignement scientifique de très grande qualité et qui travaillent ensuite dans des banques ou des cabinets de « conseils », sans aucune activité scientifique, et sans que cela n'ait constitué leur motivation initiale (motivation que le système leur laisse rarement le temps d'approfondir). Ainsi, au lieu de faire de l'enseignement de fin de lycée une occasion de faire découvrir au plus grands nombres possibles d'élèves ce que sont vraiment les maths, en leur offrant une vrai formation au raisonnement et en permettant de développer une capacité d'analyse rationnelle, les deux dernières années de lycée deviennent une « pré-prépa », destinées à « sélectionner » ceux qui auront le droit d'aller en prépa, et donc à *éliminer (!)* ceux qui n'y auront pas accès. Les effets néfastes associés à cette conception de l'enseignement, basé sur des évaluations « sélectives » plutôt que formatives, redescendent d'ailleurs jusqu'au primaire, où les enseignant se retrouvent confrontés à des parents protestant contre l'absence de notes permettant de « classer » leur enfants de 8 ans !

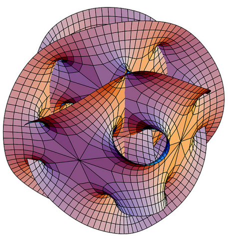
Cela conduit donc non seulement au rejet d'un grand nombre de jeunes qui aurait pu faire de bons scientifiques (ingénieurs, chercheurs, mais aussi enseignants et passeurs de science), mais en plus à une souffrance considérable des jeunes, à qui on n'offre plus le plaisir d'apprendre et donc l'épanouissement nécessaire pour qu'ils deviennent des citoyens moteur de leur avenir. « On » cherche bien plutôt à assurer la reproduction d'une élite auto-proclamée, et les inégalités du système éducatif s'amplifient. Alors qu'elle devrait être un lieu de plaisir et d'épanouissement, l'école devient trop souvent un lieu d'angoisse et de souffrance ! On demande par ailleurs beaucoup trop tôt aux enfants de « s'orienter » ; comment peut-on être sûr de ce qu'on veut faire « plus tard » à 16 ans ? (cf le drame de parcoursup pour les enfants qui n'ont pas la chance d'avoir des parents ayant le temps ou la connaissance nécessaire pour une utilisation sereine de cette abominable usine à gaz bricolée, à partir d'ailleurs d'une idée plutôt louable, par des politiciens incompétents).

Cela ne signifie pas forcément que les prépas soient de mauvaises formations. Mais c'est donc bien le mode d'orientation (et non de sélection) vers ces formations intenses et spécialisées qui devrait être revu. Le lycée devraient permettre aux élèves de trouver une vraie motivation pour ces cursus, qui gagneraient par ailleurs à se rapprocher des universités. Les prépas devraient de plus profiter du fait d'accueillir des élèves a priori « performants » dans les domaines étudiés pour justement offrir un enseignement plus serein et approfondi, sans viser une « performance » douteuse et discutable sur le plan de la valeur scientifique. C'est d'autant plus regrettable que lorsqu'on a la chance d'aller en prépa avec une vraie motivation sereine et assumée pour le domaine étudié, on peut y prendre plaisir, tant l'enseignement peut y être de qualité, pour peu qu'on arrive, parfois, à faire abstraction de la finalité stressante du passage de concours. Le rapprochement avec l'université pourrait ainsi consister en une

formation intense offerte à ceux qui souhaitent se spécialiser dans un domaine purement scientifique (ou littéraire pour les prépas littéraires), avec à l'issue une passerelle naturelle vers l'université sans que cela soit considéré comme un échec. Des passerelles simples devraient d'ailleurs être créées à tous niveaux, entre tous les domaines.
L'enseignement des mathématiques devrait donc promouvoir la profondeur de compréhension et les capacités d'analyse, en offrant aux élèves le temps de s'approprier des notions fondatrices de la démarche mathématique. Il conviendrait d'être beaucoup moins ambitieux sur la *quantité* d'objets mathématiques à connaitre, mais plutôt d'insister sur un ensemble plus restreint de connaissances fondamentales, sur la cohérence interne et les liens entre les différents domaines des mathématiques, assurant ainsi des bases solides pour un enseignement ultérieur éventuel. Cela devrait être soutenu par quelques aspects historiques et heuristiques justifiant l'introduction de nouveaux objets.

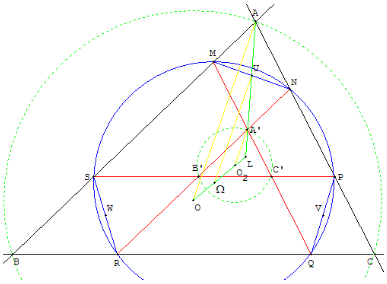
- ***Ré-enchanter les mathématiques***

Pourquoi doit-on apprendre des maths ? Cette question, de la part des élèves, est légitime. Pourtant les mathématiciens (enseignant et chercheurs) ne cherchent pas à y répondre autrement qu'avec des propos éculés et caricaturaux : les maths sont partout, ça sert à la finance (pas sûr que ça motive les jeunes !), « ça apprend à raisonner » (sur quoi, comment, pourquoi ?)… N'enseigner les maths que dans un but utilitaire, sans en présenter la nature profonde revient à enseigner du solfège sans jamais faire écouter de musique !!
Ce sont toujours les mêmes arguments depuis des siècles, et pourtant la société et donc les mentalités ont évoluées. Il faut réadapter les réponses. La façon de faire des maths évolue ! Les mathématiciens semblent l'ignorer. On ne fait pas des maths en 2022 comme Gauss, qui pourtant s'y connaissait un peu, en faisait en 1810.
Compte tenu de l'image actuelle des maths, abominable outil de sélection (charmant concept quand on parle d'enfants), nous devons une réponse plus argumentée et surtout plus réjouissante aux enfants et aux jeunes.



Pour moi, le premier élément de réponse à cette question légitime passe par une *définition* de ce que sont les mathématiques. Il est étonnant de constater que de nombreux mathématiciens semblent incapables, ou n'essayent pas, de donner une définition ne fusse qu'approximative de leur activité. Soit ils donnent une *justification* douteuse par quelques applications des mathématiques, soit ils finissent par dire que les maths, c'est ce que font les mathématiciens ! Pour relancer l'enseignement bien mal en point des mathématiques, arriver à définir en quoi elles consistent, sans les justifier par un utilitarisme foireux et à courte vue me semble essentiel. Redonnons ici la définition proposée précédemment, sans doute imparfaite, mais qui se veut un point de départ :

Les mathématiques sont un ensemble d'objets et de méthodes intellectuels créés (ou utilisés ?) par l'esprit humain pour décrire, comprendre et modéliser le monde physique qui l'entoure. Ces objets et méthodes sont des idéalisations issues de la simplification de divers aspects de la nature (c'est seulement et simplement en cela qu'ils sont abstraits !). Mais les mathématiques sont aussi un ensemble plus vaste d'objets et de méthodes développés par pure curiosité intellectuelle à partir de ceux issus de l'observation naturelle. Le développement des mathématiques s'appuie fondamentalement sur ces deux démarches, modélisation idéalisée de la nature et curiosité intellectuelle, sans que l'une ne puisse se passer de l'autre ; ces deux démarches sont synergiques, chacune offrant de l'inspiration à l'autre. La spécificité des mathématiques s'appuie également sur des modes de raisonnement précis, dont la validation ne dépend pas d'une comparaison à l'observation, mais du respect d'une démarche déductive bien définie, appelée logique. Ainsi, les mathématiques nous offrent donc plus que ce que nous leur avons demandé. Initialement moyen de comprendre le monde qui nous entoure, elles sont aussi une science autonome, se développant pour elle-même, en proposant de formidables défis intellectuels, tout en offrant un merveilleux espace de créativité. Dit de manière plus poétique : Faire des mathématiques, c'est créer des mondes merveilleux, et les explorer en s'affranchissant des contraintes du réel.

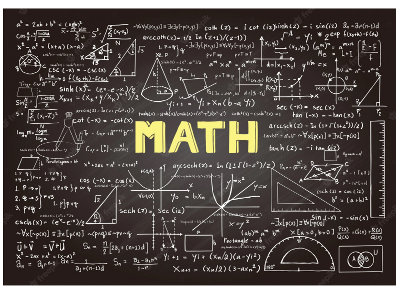


Une fois posées ces déclarations d'intention, il convient évidemment de décliner des modalités plus concrètes. Il est bien triste de constater que toutes les bonnes idées ont déjà été posées par de nombreux universitaires, s'interrogeant sur l'enseignement des mathématiques, depuis des dizaines d'années : par exemple les papiers de JP Demailly en 2007 déjà, et surtout plus récemment le rapport Villani-Torossian. Par ailleurs, une grande majorité d'enseignants déplorent la situation actuelle et rêvent de pouvoir transmettre sereinement leurs connaissances, voire leur passion, en tentant de résister aux dictats politiques, mais ils sont contraints par des programmes aberrants construits par des bureaucrates éloignés de tout sens pédagogique et par l'obligation due aux élèves de les préparer à faire face au « système » qui les attend… Mes critiques ici s'adressent essentiellement à une certaine conception de notre société, certainement pas aux enseignants (sauf à ceux qui soutiennent cette conception !).

Concernant la notion de démonstration : Les mathématiques sont présentées et enseignées dans l'école secondaire comme une somme de techniques calculatoires, de recettes, qu'il convient d'appliquer mécaniquement. C'est en contradiction complète avec l'essence des mathématiques, qui consiste à étudier un problème pour découvrir la meilleure méthode de résolution, ce qui passe par une compréhension profonde des objets manipulés, par la recherche de l'éventuel besoin de les généraliser, par la recherche de liens possibles avec d'autres objets, d'autres domaines. Les mathématiques doivent offrir le plaisir de la réflexion, et s'appuyer sur l'imagination ; bref tout sauf une mécanique basée sur des automatismes. Il est ainsi consternant de constater la disparition quasi totale de la géométrie pure, qui permet de faire découvrir tous ces aspects des mathématiques. Plus généralement, la notion de démonstration a été quasiment bannie de l'enseignement secondaire : tous les exercices ou problèmes sont devenu de la forme : « calculer telle expression… », on ne voit plus jamais de « démontrer que… ».

Cette absence de formation au plaisir de démontrer des affirmations, (affirmations qu'il peut être enrichissant de faire découvrir aux élèves, car proposer une hypothèse, par exemple en s'appuyant sur des exemples, est déjà en soi un acte de recherche), est extrêmement regrettable, car c'est bien là que réside l'apport essentiel de la formation aux mathématiques : savoir construire un raisonnement logique, et donc acquérir la formation et la structuration de modes de raisonnement et de pensée qui doit permettre à chaque individu de s'émanciper. C'est ça les *vraies* mathématiques. Ce n'est pas une course de vitesse à celui qui appliquera le plus rapidement « la bonne formule ».

Concernant l'abstraction souvent reprochée aux mathématiques : c'est un faux procès issu d'une incompréhension totale de la nature des mathématiques. Compter est déjà un acte extraordinaire d'abstraction : on associe un même objet, un nombre, à des objets de natures; radicalement différentes. Puis on pratique des opérations, addition, multiplication, etc… totalement indépendamment des objets considérés. L'abstraction n'est qu'une manière d'idéaliser des structures de la nature, pour n'en garder que les aspects essentiels à l'étude d'une situation donnée. C'est un processus naturel, que nous faisons tous, tous les jours. Une fois que cela est admis, ça fait bien moins peur !

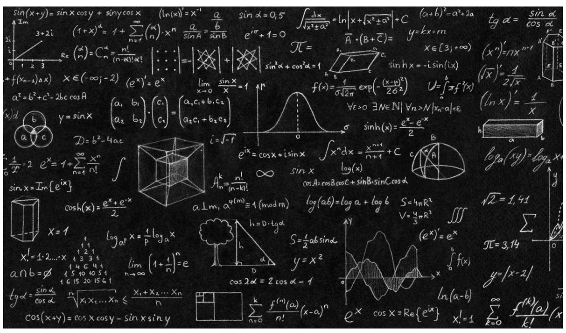


Il est interessant de constater que, contrairement au caractère « indispensable » des maths que l'on assène aux écoliers, bien peu, si ce n'est aucune, des notions mathématiques vues à l'école sont « utiles » dans la vie quotidienne, y compris pour ceux qui les pratiquent dans leur activité professionnelle. Alors pourquoi apprendre des maths ? Là encore cela prouve qu'il faut justifier les maths par leur apport culturel et formateur, comme l'histoire et le français, sans les rattacher à une quelconque « utilité » à courte vue qu'il risque d'être bien difficile de démontrer. C'est donc bien pour offrir

à tout individu un bagage culturel permettant *d'appréhender* le monde qui l'entoure, en lui permettant de saisir les enjeux des phénomènes auquel il pourra être confronté, sans nécessairement en être spécialiste. Dans le cas des mathématiques, et des sciences plus généralement, il s'agit que chacun acquiert *la confiance* dans la valeur de ces domaines fondamentaux de la culture humaine, indissociables de l'évolution des sociétés et des enjeux auxquels elles font face. Tout le monde n'a pas à devenir mathématicien professionnel, mais en en saisissant les fondements et les modes de fonctionnement, chacun doit acquérir les moyens de discerner la valeur d'un discours scientifique s'appuyant sur les mathématiques, écartant les contre-vérités, et reconnaissant une démarche crédible. Il s'agit bien de redonner confiance dans la valeur de la science, et ce n'est pas en en présentant une image fausse et malhonnête que cela se fera !
Plus modestement, l'école doit offrir aux enfants les moyens de s'épanouir, « en trouvant leur voie ». C'est donc bien en présentant fidèlement tous les domaines de connaissance, dans les quels il conviendrait d'ailleurs d'inclure les arts, sans les hiérarchiser ni s'en servir comme moyen de sélection, que l'on doit offrir au futur citoyen les moyens de construire une affinité avec un domaine, tout en acquérant du respect et de la confiance vis-à-vis des autres domaines. Par ailleurs, l'argument de construction de capacité de raisonnement, évidente peut-être par nature pour les mathématiques, est tout aussi valable en physique ou en biologie, mais aussi en français, philosophie ou histoire : construire un argumentaire dans une dissertation ou démontrer les implications d'un fait historique est certainement tout aussi valable et important que de savoir démontrer rigoureusement un énoncé mathématique. Mieux, ces compétences sont fondamentalement complémentaires. Mais que certains n'en profitent pas pour sous estimer la valeur (et la puissance) du raisonnement mathématique, car c'en est bien un élément fondamental et constitutif. Ainsi, la création littéraire artistique ne repose pas forcément sur la recherche d'un raisonnement indiscutable, mais n'en demeure pas moins indispensable au bien-être humain ! Revenant à mes propos précédant cette digression, cela montre également que bien plus que l'accumulation de connaissances, c'est bien l'apprentissage de l'analyse et de la recherche qui devrait être valorisé, pour développer les capacités critiques.

Un autre aspect de la formation scolaire devrait également être revu. Les plus grandes avancées scientifiques et technologiques sont aujourd'hui toujours le fruit d'une importante collaboration. Les résultats d'expériences, comme la détection d'ondes gravitationnelles, du boson de Higgs, sont présentés dans des articles co-signés par des centaines de chercheurs. Les avancées technologiques nous apparaissent également naturellement comme le fruit du travail commun de centaines d'ingénieurs. Pourtant, à l'école, on « condamne » toujours l'élève à être seul face à son problème de maths ou de physique, valorisant la rapidité de celui qui sera le premier à présenter sa solution. On enferme les élèves dans une compétition, ridiculement basée sur la vitesse, effrayante et décourageante pour ceux qui parfois ont, à très juste titre, besoin de plus de temps parce qu'il cherche une compréhension plus profonde des notions qu'ils doivent acquérir. C'est en contradiction complète avec l'activité créatrice moderne en science et en technologie. La réflexion et le « travail » personnel, en solitaire, sont évidemment nécessaires pour s'approprier les idées et les méthodes. Mais il serait donc à mon avis indispensable de valoriser et enseigner le travail en collaboration, apprendre à résoudre des problèmes à plusieurs, dès l'enseignement primaire et jusqu'au secondaire, voire plus.

Certes cela demande de revoir complètement nos processus d'évaluation, et je ne nie pas non plus que chaque individu doit parfois être évalué individuellement, non pour le « sélectionner », mais pour l'aider à se développer, à s'orienter, à s'épanouir. Quel magnifique changement moral cela apporterait à notre conception de la société que de valoriser le travail collaboratif ! Contrairement à beaucoup, je ne crois pas que la compétition ou, comme on l'entend trop souvent, « les coups de pieds au fesses », soient les méthodes pédagogiques les plus efficaces ! A ceux qui le prétendent, je répond : « avez-vous



essayé autre chose ? ». Et assurément, aujourd'hui, les meilleurs et les plus beaux progrès ne sont pas accomplis sans collaboration.

Concernant les compétitions de mathématiques : C'est une activité qui séduit certains jeunes, et certains adultes. Beaucoup d'associations cherchant à promouvoir les mathématiques appuient leur activité sur la participation des jeunes à des « compétitions » de mathématiques : olympiades, concours divers et variés. Par exemple, sur le site de l'association « Animath », excellente par ailleurs, il est mis en avant l'action de cette association pour amener les jeunes vers « des mathématiques, basées sur l'ingéniosité et la rapidité d'action, qui sont révélatrices de capacités plus générales. L'aspect compétitif de ces mathématiques permet de développer un cadre d'émulation pour atteindre *l'excellence*. Animath organise la sélection, l'entraînement et la participation d'équipes françaises à ces compétitions»… (C'est moi qui souligne le terme « excellence », terme particulièrement à la mode aujourd'hui, sans qu'on sache bien quelle signification souhaite lui donner leurs utilisateurs, mais qui surtout sert à promouvoir un élitisme mal placé et dénué de toute pertinence scientifique…)
Si il peut servir d'émulation pour certains esprits ou apparaitre ludique pour d'autres, ce type de compétition ne correspond pas à la pratique de la recherche scientifique fondamentale, basée sur le temps long, le questionnement et la collaboration entre collègues. Certes, d'immenses mathématiciennes ou mathématiciens, tels Maryam Mirzakhani ou Terence Tao, ont été « éduqué » et « repéré » à travers leur participation à ce type « d'olympiades de mathématiques ». Mais est-on sûr que seul ce type de *sélection* soit à même de repérer et de promouvoir l'émancipation et l'épanouissement d'esprits capables de faire de belles sciences ? Il me semble que cette démarche exclue là encore de nombreuses personnes qui seraient à même, par leur besoin d'approfondir un sujet, leur besoin de s'approprier sereinement les idées nécessaires à la résolution de problèmes, de produire de belles mathématiques, ou simplement d'ailleurs de prendre plaisir en faisant des mathématiques quel que soit leur niveau.
S'il est plus ou moins compréhensible qu'une entreprise dont le but est de générer des « profits » choisisse un processus de *sélection* lui garantissant une « efficacité » des personnes choisies, même si ce processus de sélection *élimine* des candidats potentiellement très capables bien que moins adapté au système de sélection retenu par cette entreprise, ceci est totalement inacceptable de la part d'un système éducatif destiné aux enfants et aux jeunes.
Mentionnons en revanche les remarquables actions de l'association « Maths en Jeans » qui entraine des groupes de collégiens ou lycéens à travailler *en groupe* à la résolution de problèmes de recherche sur une période d'un an : c'est une approche saine et réjouissante des mathématiques, qui privilégie la collaboration et l'entraide, et représentative de la véritable pratique de la recherche scientifique.

Extraits du rapport Villani-Torossian, partie « Des maths pour tous » :

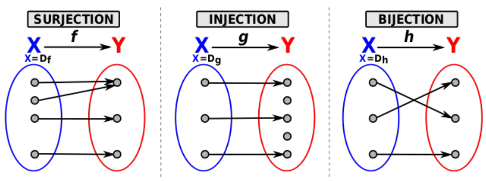
« Les mathématiques sont nécessaires à la démocratie parce qu'elles favorisent l'autonomie et la capacité d'innovation. Il est ainsi indispensable de fournir aux enfants tous les outils de logique, de calcul, de développer chez eux l'intuition et la démarche scientifique, la rigueur et sa nécessité, et enfin de leur permettre de mener des raisonnements et d'élaborer des preuves.

En tant que langage des sciences, les mathématiques permettent d'approcher efficacement de nombreux domaines […] et de créer des descriptions quantitatives précises du monde. La pensée mathématique, la résolution de problèmes et la modélisation sont nécessaires dans de nombreux domaines professionnels tels que la santé, l'économie, la conception graphique.

Rappelons enfin que les mathématiques font partie de notre patrimoine culturel. Elles constituent l'une des plus anciennes et des plus nobles traditions intellectuelles de l'humanité. C'est pourquoi nous pensons que tous les citoyens devraient développer une appréciation et une compréhension de cette réalisation humaine dans toutes ses dimensions, y compris esthétique et récréative. »

Quelques idées, en vrac :
- chaque année de cours doit débuter par un cours sur « qu'est-ce que les mathématiques ? » La profondeur et la complexité des réponses devant s'adapter à l'âge et au recul des élèves.
- arrêtons de justifier les maths par leur « utilité » en finance !!

- dire qu'il faut rendre les maths moins abstraites est un non-sens. Il faut démystifier cette notion d'abstraction. Les maths sont par essence « abstraite », mais ce qu'il faut affirmer c'est que notre cerveau a par nature un fonctionnement abstrait ! L'abstraction, ce n'est que la simplification d'une situation étudiée pour pouvoir mieux la comprendre. C'est donc ce qu'on fait tous, tous les jours.
- justifier l'introduction de nouvelles notions par une motivation historique ou heuristique : ex théorie des ensembles
- apprendre que l'erreur est constitutive de l'apprentissage. Ainsi, par exemple, on pourrait concevoir toutes les évaluations en deux temps : 1/ une première évaluation est faite sur des exos, puis le corrigé est rendu. 2/ une deuxième évaluation est faite une semaine plus tard, sur les mêmes sujets. C'est cette dernière qui sera « évaluante ».
- Promouvoir l'importance de l'intuition, de l'utilisation de figures et de dessins.
- Les maths c'est pour tous ! En effet, si l'on accepte la définition posant que les maths sont la démarche naturel de tout humain pour décrire le monde qui l'entoure, alors tout humain fait des maths, tout le temps. Cela ne signifie pas que tout le monde deviendra mathématicien « professionnel », mais que chaque individu est tout à fait capable d'apprécier et de maitriser quelques beaux éléments de vraies mathématiques. Le bloquage observé chez de trop nombreuses personnes est essentiellement dû a un enseignement inadapté et/ou un rejet dû à l'utilisation scolaire désastreuse des maths comme outil de sélection.
- réintroduire la notion de démonstration ! c'est fondamental. Présenter ainsi les bases du raisonnement logique, différences entre axiome, définitions, théorèmes, démonstration. Valoriser le raisonnement plutôt que l'application mécanique de formules. Le retour de la géométrie serait certainement très profitable.
- Concernant l'apprentissage des principes de démonstration, une piste pourrait être de suggérer qu'elles se font en trois temps, pour tout mathématicien, professionnel ou amateur : 1/ trouver le résultat intuitivement ; 2/ s'en faire une démonstration convaincante pour soi ; 3/ en faire une démonstration convaincante pour « les autres ».
- La théorie des ensembles pourrait être introduite de manière ludique très tôt et constituer la base de tout enseignement des maths. C'est depuis 100 ans le fondement incontournable de toutes les mathématiques, et son absence dans l'enseignement des maths conduit à des incompréhensions et à des raisonnement erronées. S'en priver, c'est risquer de passer à coté de la nature exacte de beaucoup d'objets présentés. Pourtant cette base fondamentale des mathématiques peut être enseignée avec des petits dessins simples et assez réjouissant. C'est ainsi grâce aux ensembles qu'on peut définir ce qu'est « l'infini », et montrer qu'il y a « des infinis plus grands que d'autres » ! Ce qui est quand même assez magique…

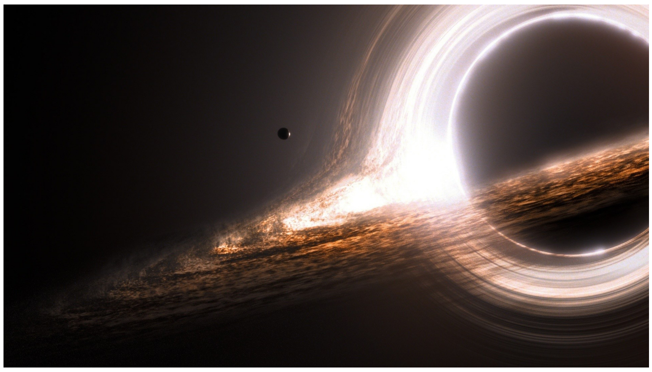


- S'appuyer sur un ou deux livres pour guider le cours, qui serviront de moyens d'approfondissement
- Justifier l'apprentissage des maths parce qu'elles sont « utiles » est complètement stupide. L'histoire, l'art, l'alpinisme sont sans doute « inutiles ». Faut-il donc arrêter d'en faire ?
- Expliquer qu'il est normal de trouver l'appropriation des notions et raisonnements mathématiques difficile, que chacun a besoin d'un temps différent, qu'il faut se construire ses propres images et intuitions, et ne pas hésiter à questionner et collaborer.
- Promouvoir la collaboration, accepter de donner plus de temps à l'approfondissent des notions à ceux qui en ont besoin. Cesser de promouvoir la compétition comme moyen de « viser l'excellence » (excellence en quoi, pour quoi ?) et de « sélectionner » les élèves ; c'est une conception particulièrement déplaisante de l'enseignement, qui exclut et décourage trop d'étudiants, et dont les vertus pédagogiques me semblent très discutables.

- Motiver l'enseignement des mathématiques par leur lien avec la physique fondamentale :

Lier l'enseignement des mathématiques à celui de la physique permettrait d'offrir une motivation historiquement et intellectuellement pertinente, mais également désintéressée. En particulier, associer les outils mathématiques présentés au développement de l'astronomie serait historiquement juste car ces deux sciences sont depuis l'antiquité des partenaires distincts mais inséparables, chacun étant

sources de questionnement et d'inspiration pour l'autre. Aucun enfant n'est insensible aux aspects fascinants de l'astronomie et de l'astrophysique, et cette motivation serait certainement plus efficace que les problèmes de calcul de taux d'intérêts bancaires ou de robinets qui fuient !
Rappelons ainsi que les trous noirs, aux quels personne ne peut être insensible, ont d'abord été rêvés par les mathématiciens avant d'être acceptés par les physiciens.



- Les « maths modernes » aujourd'hui :

Il est communément admis que l'introduction des « maths modernes » dans l'enseignement a été un échec. Si de nombreux écrits tentent d'en donner des raisons, la lecture d'un article de Frank Quinn (dont certains points sont par ailleurs discutables) m'amène au idées suivantes :

Les mathématiques ont connu une « révolution » au tournant du 20ème siècle, baptisée « la crise des fondements ». Les racines, tenants et aboutissements de cette révolution sont passionnants et devraient d'ailleurs, en les synthétisant, faire l'objet d'un cours indispensable à tous étudiant en mathématiques, voire à des lycéens s'orientant vers les maths.

Pour faire bref, disons que cette révolution a été la prise de conscience par les mathématiciens de la « vraie nature » des mathématiques. (Du moins, soyons modeste, de celle que l'on comprend aujourd'hui, mais qu'il faudra peut-être de nouveau revoir un jour…).

Alors que jusqu'au 19ème siècle on acceptait des démonstrations très « expérimentales », basées sur des intuitions mal fondées, issues souvent de la physique, il est apparu vers la fin de ce 19ème siècle la nécessité de s'assurer que l'on pouvait assoir les mathématiques, ses fondements, ses axiomes, et ses modes de raisonnement sur des bases solides et détachées du « réel », (je raccourcis fortement). Ce qui ne signifie pas que les mathématiques se sont détaché de la physique, bien au contraire (cf la relativité générale !), mais que la nature de leur relation s'est modifié.

Ce qu'il faut retenir, même si cela fait l'objet de très nombreux papiers beaucoup plus argumentés, c'est que la façon de « faire » des maths a très fortement évolué. Plus exigeante par certains aspects, mais, et c'est une façon beaucoup plus réjouissante de le voir, plus libérée aussi des contraintes du monde réel… Cette vision mériterais ainsi de servir de motivation pour les maths ! Surtout, ce changement de conception des maths a permis une véritable « explosion » de la production mathématique, tant sur le plan quantitatif que qualitatif : il y a eu plus de théorèmes et de nouvelles théories produites au 20ème siècle que dans toute l'histoire précédente.

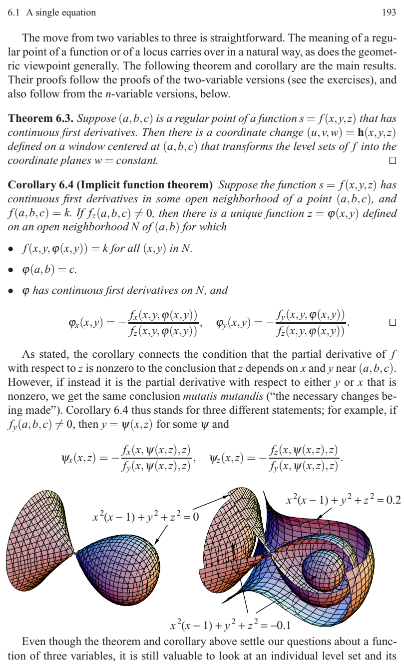
C'est cette évolution, cette révolution, que l'enseignement des « maths modernes » a voulu introduire à l'école. Mais il manquait certainement les explications, les justifications, et le recul nécessaire.

Ainsi certains mathématiciens et enseignants prônant les « maths modernes » ont sans doute perdu de vue pendant quelques décennies que si cette méthode axiomatique très rigoureuse fonde les mathématiques d'une manière quasi inattaquable et leur donne une puissance créative inimaginable auparavant, elle tend à occulter, au moins « officiellement », l'importance de l'intuition et de la recherche de sens des objets et des méthodes, et rend possible l'oubli de leur enracinement historique dans le réel. Je dis « officiellement » car la pratique mathématique a toujours reposé fondamentalement sur l'intuition, sur des images mentales approximatives qu'il s'agit d'affiner. Le recours aux figures et dessins, si utiles comme support au raisonnement, a été banni des traités de l'école « Bourbakiste » française (école ayant pris une part fondamentale dans cette refondation, nécessaire par ailleurs, des mathématiques au milieu du 20ème siècle), et cette austérité s'est imposé à leur suite dans l'enseignement scolaire.

Les « programmes », ou disons plus simplement les objets mathématiques, enseignés à l'école aujourd'hui sont pourtant toujours des objets qui fondamentalement datent d'avant 1850, mais qu'on expose avec le « langage » mathématique du 20ème siècle, alors que ce langage n'a jamais été introduit, expliqué, justifié, aux élèves. Cela conduit à une forte « tension », et surtout à une forte incompréhension de la part de certains élèves qui, avec raison, ne rentre pas assez vite dans ce « langage » formel qu'il a fallu 2000 ans aux mathématiciens « professionnels » pour développer ! Certes, certains élèves s'y adaptent très vite, et on leur attribue alors « la bosse des maths ». C'est ridicule, car la encore la vitesse n'est pas une garantie ; il faudrait bien mieux considérer ces réussites comme les preuves que tous le monde peut aborder, avec la pédagogie adaptée, cette façon moderne de faire des maths.

Heureusement, depuis disons 30 ans, confortés par l'assurance obtenue suite à cette révolution des fondements, la plupart des mathématiciens, chercheurs, enseignants universitaires, mais aussi les indispensables « passeurs de sciences », reviennent à une vision plus « naturelle » des mathématiques, à leurs enracinement dans la modélisation du monde qui nous entoure, même s'il elles offrent plus que jamais un espace de créativité et de questionnement qui peut s'en détacher par plaisir ou curiosité. Le rôle de l'intuition est réaffirmé, (en lien avec les neuro-sciences). De grands chercheurs, partageant leur expérience, affirment d'ailleurs que les preuves formelles et rigoureuses qu'ils s'efforcent de rédiger ne servent qu'à conforter la justesse de leur intuition concernant un théorème !

Enfin, les dessins et figures réapparaissent fort heureusement dans les manuels scolaires et universitaires. Les figures sont en effet un support essentiel à l'intuition, même s'il faut s'inventer ses propres figures pour s'approprier les objets que l'on manipule, avec l'indispensable prudence dont il faut faire preuve quant aux fausses impressions qu'elles peuvent engendrer : il est évidemment délicat de « dessiner » un espace géométrique de dimension 11 dans lequel on étudie les positions relatives de sous-espaces de dimension 7 ! Bref, « l'art de raisonner juste sur des figures fausses ». Le retour des figures dans les livres de maths est réjouissant et indispensable à mon avis : contrairement à ce qu'on croit, les maths ce ne sont pas que des « formules », c'est au moins autant des dessins, des schémas, des figures !


6.1 A single equation 193

The move from two variables to three is straightforward. The meaning of a regular point of a function or of a locus carries over in a natural way, as does the geometric viewpoint generally. The following theorem and corollary are the main results. Their proofs follow the proofs of the two-variable versions (see the exercises), and also follow from the n-variable versions, below.

Theorem 6.3. *Suppose (a,b,c) is a regular point of a function $s = f(x,y,z)$ that has continuous first derivatives. Then there is a coordinate change $(u,v,w) = \mathbf{h}(x,y,z)$ defined on a window centered at (a,b,c) that transforms the level sets of f into the coordinate planes $w =$ constant.* □

Corollary 6.4 (Implicit function theorem) *Suppose the function $s = f(x,y,z)$ has continuous first derivatives in some open neighborhood of a point (a,b,c), and $f(a,b,c) = k$. If $f_z(a,b,c) \neq 0$, then there is a unique function $z = \varphi(x,y)$ defined on an open neighborhood N of (a,b) for which*

- *$f(x,y,\varphi(x,y)) = k$ for all (x,y) in N.*
- *$\varphi(a,b) = c$.*
- *φ has continuous first derivatives on N, and*

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}, \quad \varphi_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}. \qquad \square$$

As stated, the corollary connects the condition that the partial derivative of f with respect to z is nonzero to the conclusion that z depends on x and y near (a,b,c). However, if instead it is the partial derivative with respect to either y or x that is nonzero, we get the same conclusion *mutatis mutandis* ("the necessary changes being made"). Corollary 6.4 thus stands for three different statements; for example, if $f_y(a,b,c) \neq 0$, then $y = \psi(x,z)$ for some ψ and

$$\psi_x(x,z) = -\frac{f_x(x,\psi(x,z),z)}{f_y(x,\psi(x,z),z)}, \quad \psi_z(x,z) = -\frac{f_z(x,\psi(x,z),z)}{f_y(x,\psi(x,z),z)}.$$

Even though the theorem and corollary above settle our questions about a function of three variables, it is still valuable to look at an individual level set and its

Liens avec la physique, importance de l'intuition et des dessins, ne sont pas encore assez officialisés et intégrés dans l'enseignement secondaire.

J'ai ainsi constaté cette année (2022) que les élèves « soumis » à l'option « maths expertes » de la classe de terminale du lycée se voyaient proposer des exercices d'arithmétique « classique » (très amusant d'ailleurs) mais présentés avec un langage mathématique très formel auquel beaucoup n'avait jamais été exposés.

Il faut absolument enseigner les maths telles qu'elles se font aujourd'hui puisqu'elles se montrent riches et fructueuses. Ce ne serait certainement pas offrir aux élèves un avenir dans les sciences que de ne leur proposer que des maths préhistoriques. Il faut donc réintroduire l'enseignement de mathématiques « modernes », mais avec une pédagogie revue, adaptée, et surtout plus modeste. De même qu'il a fallu une très longue maturation aux scientifiques pour y parvenir depuis l'antiquité, il faut accepter que certains élèves puissent avoir besoin de temps pour s'y former, d'autant qu'ils ne sont formés avant le lycée qu'à une manipulation assez expérimentale et sans justification des objets mathématiques. La formation à cette façon moderne de faire des maths passerait à mon avis très bien par une formation progressive, dès le collège, aux bases de la théories des ensembles et des fondements élémentaires du raisonnement logique (démonstration par l'absurde, l'analyse-synthèse, etc…), parallèlement à l'apprentissage des objets plus classiques et « concrets ». Là aussi, encore une fois, une justification et une « définition » de ce que sont les maths (modernes !) aideront à introduire ces idées modernes, fascinantes, mais nécessitant un temps d'appropriation.

Terminons sur quelques remarques justifiant l'importance des mathématiques pour ceux qui ne se destinent pas à des études ou une carrière scientifique. Si l'apprentissage des mathématiques est en effet une évidence pour les personnes se dirigeant vers la physique, l'ingénierie ou la biologie, il est tout à fait absurde d'opposer, comme le fait de manière stupide le système français, mathématiques et littérature ou sciences sociales. Les mathématiques sont une part fondamentale de la culture humaine, une de ses plus immenses réalisations. Toute l'évolution scientifique et technologique de l'humanité s'est construite sur le développement des mathématiques. Elles font donc partie de la culture commune au même titre que la littérature, l'histoire, la musique, l'art…

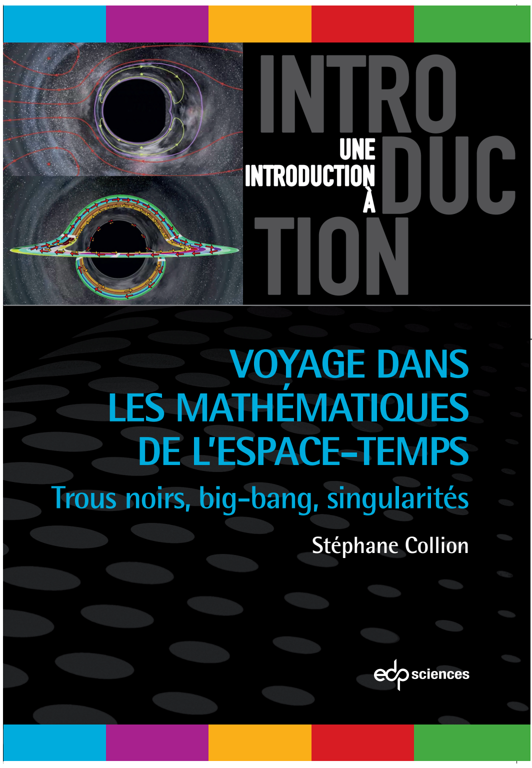
C'est une grave erreur, donc, que d'opposer raisonnement et culture mathématiques et raisonnement et culture philosophique ou humaniste. Regardez de nouveau les belles images de surfaces minimales que j'ai placé au début de la partie sur le plaisir de faire des maths : comment ne pas être émerveillé par ces objets beaux et intrigants. Ils ont inspiré de nombreux artistes, graphistes, évidemment, comme MC Escher, mais aussi écrivains, qui ont trouvé de profondes sources d'inspiration dans la magie des nombres premiers, dans les concepts de surfaces n'ayant qu'un seul coté, comme le ruban de Moëbius, ou ne délimitant ni intérieur ni extérieur comme la bouteille de Klein. On trouve déjà ces sources d'inspirations chez Edgar Allan Poe ou Lewis Caroll, et aujourd'hui chez plein d'auteurs de science-fiction ou de récits fantastiques. Il est dommage de ne pas les aborder, au moins à titre culturel, à l'école.

Au delà de ces inspirations artistiques, l'apprentissage du raisonnement mathématique peut certainement épauler profitablement les raisonnements philosophiques ou sociologiques, parfois trop polémiques et dont les définitions et les critères de validation ne sont pas toujours bien posés. Nous l'avons vu avec notre discussion sur la nature des objets mathématiques, les mathématiques sont un merveilleux moyen d'appréhender le monde qui nous entoure. Et contrairement à un fausse image, le raisonnement mathématique n'est pas « froid et triste » : lorsqu'on connait un peu de maths, on découvre facilement de la beauté et de l'élégance dans une démonstration ; les mathématiciens utilisent très souvent ces qualificatifs. La géométrie, disparue des programmes scolaires, en abonde d'exemples. D'ailleurs, il faut savoir que les démonstrations mathématiques sont profondément « humaines » : elles sont souvent sujets à des effets de mode, et parfois même à des conflits d'opinions sur la pertinence de l'utilisation de certains outils plutôt que d'autres. A titre anecdotique (et un peu marginal), on peut citer le mathématicien Jan Brouwer, célèbre topologiste du début du XX-ème siècle, qui refusait dans ses raisonnements certaines manipulations liées à l'infini ; ses travaux sont pourtant incontournables en maths dans des domaines où « l'infini » est omniprésent. Et enfin, c'est le règne de l'égalité entre individus : si un « élève » trouve une démonstration plus efficace que celle du « prof », ce dernier ne pourra jamais le contester.

Mais enfin et surtout, la maitrise des notions fondamentales des mathématiques permettrait à tout citoyen de ne plus se laisser tromper par des journalistes ou politiques incompétents exhibant courbes et chiffres alors qu'ils n'y comprennent rien. Il est stupéfiant de constater les articles ou discours où ces individus confondent sans rien y comprendre millions et milliards sans aucune maitrise des plus élémentaires notions d'ordre de grandeur, ou qui, décrivant la pandémie de covid, parlent de « plateau ascendant à tendance exponentielle ». Une écologiste, une philosophe, une militante des droits ou une sociologue trouvera un allié précieux dans les mathématiques pour développer des raisonnements fins et précis, lui permettant d'enrichir sa liberté de jugement et d'opinion.

Ce petit essai est né de la volonté de répondre aux interrogations suscitées par des discussions avec des amis ou collègues. Il s'est construit petit à petit, à partir de réflexions étalées sur de nombreux mois. Il ne devait initialement pas dépasser 5 pages… raté ! Il a ainsi connu une cinquantaine de versions finales… Après chacune d'entre elles, de nouvelles questions, de nouvelles lectures ou émissions de radio, m'ont conduit à rajouter quelques pages. Le but n'étant que de partager une réflexion personnelle qui s'est construite sur une longue période, j'ai certainement emprunté au fil de l'écriture, plus ou moins consciemment, quelques phrases à d'autres auteurs ou amis. J'ai tenté d'en citer certains au fil du texte mais j'en ai certainement oublié beaucoup…

Michel Vaugon, Eric Gourgoulhon, Etienne Klein, Etienne Ghys, Pierre-Louis Lions, Michael Launay, Bernard Tessier, Patrick Popescu-Pampu, David Bessis, Nicolas Martin, Roger Penrose, Michael Attiyah, Cedric Villani, John Stillwell, Timothy Gowers, William Thurston, …



Cet essai développe également certaines idées ébauchées dans mon livre, « Voyage dans les mathématiques de l'espace-temps », paru en 2019 chez EDP sciences. Pour ceux que cela intéresserait, il s'agit d'un ouvrage qui explore la fascinante relation entre la géométrie différentielle, branche des mathématiques née au 19ème siècle, et la relativité générale d'Einstein.